UNIVERSITÉ HASSAN II
FACULTÉ DES SCIENCES

THÈSE D' ETAT

presentée par

Youssef RAMI

Pour obtenir le grade de

Docteur Es-Sciences en Mathématiques

Specialité: Topologie Algèbrique

Titre

Sur l'algèbre de Pontryagin de certains espaces à dualité de Poincarré

Soutenue ————- devant le Jury composé de:

J.	C. THOMAS	Pr. à l'Univ. d'Angers
	Y. FÉLIX	Pr. à l'Univ. Catholique de Louvain
	A. MESSNAOUI	Pr. à l'Univ. M^d V de Rabat
	M. SBAI	Pr. à l'Univ. M^d Saadi de Kenitra
M.	R. HILALI	Pr. à l'Univ. Hassan II de Casa I.

Contents

INTRODUCTION.

Les travaux présentés ici se situent dans le contexte général suivant :

Comment les propriétés géométriques d'une variété M influent-elles sur sa topologie?

A titre d'exemple, l'existence de champs de vecteurs sans singularités sur une variété impose la nullité de l'invariant d'Euler-Poincaré de cette variété. La théorie de Morse, qui généralise l'exemple précédent, met en évidence l'importance des deux notions suivantes :

- La catégorie de Lusternick-Schnirelmann de M.
- L'homologie de l'espace des lacets ΩM de la variété M.

Les méthodes utilisées dans ce travail sont celles de l'homologie différentielle. On peut les désigner plus précisément par l'appellation paradoxale de "homotopie rationnelle mod p" qui en résume à la fois,

- l'origine : théorie de l'homotopie rationnelle au sens de Quillen et Sullivan,
- l'objet : structure d'algèbre de $H_*(\Omega X)$ sans avoir recours aux opérations de Steenrod, mais en adaptant et généralisant les techniques d'une part de l'algèbre locale, d'autre part de l'étude classique des H-espaces finis.

Le point de départ de ce travail est la construction de Spivak qui caractérise les espaces à dualité de Poincaré. Rappelons de quoi il s'agit.

Un espace topologique X (ou bien l'algèbre de cohomologie $H^*(X;\mathbb{Z})$) satisfait la dualité de Poincaré si pour un certain entier $n > 0$,

(i) $H_i(X;\mathbb{Z}) = 0\,, i > n\,,\quad H_n(X;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$.

(ii) Si ω est un générateur de $H_n(X;\mathbb{Z})$, alors,

$$\cap\omega : H^k(X;\mathbb{Z}) \to H_{n-k}(X;\mathbb{Z})$$

est un isomorphisme pour tout $k \geq 0$.

La dualité de Poincaré joue un rôle important dans certains problèmes de classifications en géométrie puisque

1- les n-variétés topologiques fermées et orientées,

2- les H-espaces finis.

sont à dualité de Poincaré et

3- pour toute fibration $F \to E \to B$ où les espaces F, E, et B ont le type d'homotopie de CW-complexes finis, l'espace E est à dualité de Poincaré si et seulement si les espaces F et B le sont.

Ces propriétés sont à la base de l'étude des actions libres d'un groupe sur un espace à dualité de Poincaré ainsi que des travaux de Thom sur le cobordisme et la chirurgie développée par Browder, Novikov, Sullivan et Wall.

Comme l'a remarqué A. Grothendieck pour les besoins de la géométrie algébrique, la notion d'espace à dualité de Poincaré se transcrit algébriquement pour donner la notion d'anneau de Gorenstein. Y. Félix, S. Halperin et J. C. Thomas ([6]) ont étendu la notion d'espace à dualité de Poincaré aux espaces qui ne sont pas nécessairement de dimension finie. Pour cela il reprennent d'abord la construction de Spivak :

Soit X un CW-complexe fini simplement connexe plongé dans un espace $\mathbb{R}^n$. On note N un voisinage régulier de X dans $\mathbb{R}^n$ tel que X soit un rétract par déformation de N. Soit F_X la fibre homotopique de l'inclusion $\partial N \hookrightarrow N$. L'espace F_X est, à suspension près, un invariant homotopique et Spivak a démontré [21] que *X est un complexe de Poincaré si et seulement si F_X a le type d'homotopie d'une sphère.*

Ils observent, d'une part, si $I\!K$ est un anneau commutatif, alors:

$$\tilde{H}_{\bullet}(F_X; I\!K) = \mathrm{Ext}_{C^{\bullet}(X,I\!K)}(I\!K, C^{\bullet}(X, I\!K));$$

où Ext désigne le "Ext différentiel" défini par J. Moore (Sem. Cartan 1960), d'autre part ce $I\!K$-module gradué $\mathrm{Ext}_{C^{\bullet}(X,I\!K)}(I\!K, C^{\bullet}(X, I\!K))$ est un invariant homotopique qui a toujours un sens, sans restriction sur la dimension de X. Il est appelé la *fibre virtuelle de Spivak* de X (X désigne un CW complexe de type fini 1-connexe non nécessairement de dimension finie.)

L'intérêt de cet invariant apparaît dans la *formule de dualité* suivante qui relie les chaînes sur ΩX aux cochaînes sur X: ([6])

$$\mathrm{Ext}_{C^{\bullet}(X,I\!K)}(I\!K, C^{\bullet}(X, I\!K)) \cong \mathrm{Ext}_{C_{\bullet}(\Omega X,I\!K)}(I\!K, C_{\bullet}(\Omega X, I\!K)).$$

Une première application de cette formule de dualité est: *Si* $\mathrm{cat}X < \infty$ *et si* $I\!K = I\!F_p$, *alors les conditions suivantes sont équivalentes:*

i) $\dim\mathrm{Ext}_{C^{\bullet}(\Omega X,I\!K)}(I\!K, C_{\bullet}(\Omega X, I\!K)) = 1$.

ii) $H^{\bullet}(X, I\!K)$ *est de dimension finie et satisfait la dualité de Poincaré.*

Par analogie, avec la théorie classique des anneaux locaux, nous avons les définitions suivantes : Si R est une algèbre graduée connexe sur l'anneau $I\!K$, alors

a) R est de *Gorenstein* si $\dim\mathrm{Ext}_R(I\!K, R) = 1$,

b) $\mathrm{prof}R = \inf\{n|\mathrm{Ext}^n_R(I\!K, R) \neq 0\}$,

c) $\mathrm{gldim}R = \sup\{n|\mathrm{Ext}^n_R(I\!K, I\!K) \neq 0\}$.

Ces invariants de nature algébrique sont reliés à la topologie de X par le résultat fondamental suivant :

Si $I\!K$ *est un corps quelconque, alors*

i) $\mathrm{prof}H_{\bullet}(\Omega X; I\!K) \leq \mathrm{cat}X$.

ii) Si $\mathrm{prof}H_{\bullet}(\Omega X; I\!K) = \mathrm{cat}X$ *alors* $\mathrm{gldim}H_{\bullet}(\Omega X; I\!K) = \mathrm{prof}H_{\bullet}(\Omega X; I\!K)$.

Ce théorème met en évidence l'intérêt d'un théorème de structure des algèbres de Hopf cocommutatives connexes de profondeur ou de dimension globale finie ([4, Th C]).

Soit G une algèbre de Hopf graduée connexe de profondeur finie sur un corps $I\!K$, alors

i) la réunion R de toutes les sous algèbres de Hopf normales résolubles de G est une sous algèbre normale nilpotente (R est appelé le radical de G),

ii) R est une algèbre de Gorenstein qui est finiment engendrée,

iii) si $I\!K$ est un corps parfait, le gradué associé à la suite centrale descendante de R est isomorphe en tant qu'algèbre, au produit tensoriel d'une algèbre de polynômes à m-variables, $m = \mathrm{prof}G$, et d'une algèbre de dimension finie.

Une des conséquences de ce dernier résultat est une généralisation des théorèmes de Serre ([20]) et Umeda sur l'existence d'une infinité de groupes d'homotopie non nuls pour une large classe d'espaces. J. Lannes et L. Schwartz ([16]) ont obtenu une autre généralisation du résutat de Serre qui recouvre partiellement ce résultat.

Il résulte aussi, du théorème précédent qu'une *algèbre de Hopf résoluble de profondeur finie est à croissance polynômiale* ([7]).

Un espace vectoriel gradué $E = \oplus_{i\geq 0} E_i$ possède une croissance polynômiale s'il existe des constantes $C > 0$ et $r \in \mathrm{N}$ telles que $\sum_0^n \dim E_i \leq Cn^r$, $n \geq 1$.

Réciproquement, ([8]): *Soit G une algèbre de Hopf graduée connexe de profondeur finie sur un corps. Si G possède une croissance polynômiale alors G est résoluble.*

Une conséquence immédiate des résultats précédents est alors : *si* cat$X < \infty$ *et si* $H_*(\Omega X, I\!K)$ *possède une croissance polynômiale alors* $H^*(X, I\!K)$ *est de dimension finie et possède la dualité de Poincaré.*

L'hypothèse de croissance polynômiale sur $H_*(\Omega X, I\!K)$ est donc très restrictive.

Par analogie avec le cas rationnel, où la dichotomie entre espaces elliptiques et hyperboliques a été complétement établie, ([10], [3]), nous avons les définitions suivantes :

Une algèbre de Hopf elliptique est une algèbre de Hopf nilpotente et finiment engendrée (en tant qu'algèbre). Une telle algèbre de Hopf est de profondeur finie et possède une croissance polynômiale. La réciproque est aussi vraie. Lorsque $I\!K = \mathbb{Q}$ l'algèbre de Hopf $H = UL$ est elliptique si et seulement si l'algèbre de Lie L est de dimension finie.

Un espace X *est dit* $I\!K$*-elliptique* si la L.S.catégorie de X est finie et si $H_*(\Omega X; I\!K)$ est une algèbre de Hopf elliptique.

Par exemple, les groupes de Lie, les espaces homogènes, 1-connexes compacts, les hypersurfaces de Dupin,... sont elliptiques. De nombreuses propriétés de ces espaces ont été établies par Y. Félix, S. Halperin et J-C. Thomas et quelques uns de leurs étudiants : L. Bisiaux [2] , H. Gammelin [11], A. Murillo [17, 18] ,... . Ces résultats ont conduit à la résolution de problèmes géométriques concernant, les espaces de configurations, les espaces de lacets libres ou les actions de groupes. Signalons dans ce dernier cas la conjecture du rang torique, posée par S. Halperin, qui a été résolue pour les actions de codimension ≤ 6 (en particulier, les variétés de dimensions ≤ 10) et des espaces hyperelliptiques considérés par M.R. Hilali ([15]).

Notre travail, qui s'inscrit dans la suite de ceux présentés ci-dessus, a pour finalité la caractérisation et l'étude des propriétés des espaces à dualité de Poincaré.

Lorsque le corps $I\!K$ est de caractéristique zéro nous utilisons la théorie des modèles minimaux développée dans le cas rationnel par D. Quillen ([19]) et D. Sullivan ([22]).

Lorsque le corps $I\!K$ est de caractéristique p, un nombre premier tel que $p > \frac{\dim X}{r}$, et X un CW-complexe r-connexe de type fini ($r > 1$), nous utilisons les travaux de D. Anick ([1]) et S. Halperin ([13]). Dans la suite nous nous référerons à ce cas en écrivant que X est dans le domaine d'Anick (cf. §2.1).

Le sujet de notre travail est divisé en trois parties :

- Dimension globale et classe fondamentale d'un espace.
- Sur la conjecture de l'omnibus.
- Espace pur défini par une tour de Postnikov.

Dans la première partie, nous exhibons une caractérisation des espaces $I\!K$-elliptiques tels que $gldim(H_*(\Omega X; I\!K)) < \infty$. Cette question est particulièrement intéressante puisque contrairement à ce qui était conjecturé, l'analogue gradué du théorème de Serre-Auslander-Buchsbaum est faux ([9]): *il existe une algèbre de Hopf de croissance polynômiale et de globale dimension finie qui n'est pas linéairement isomorphe à une algèbre de polynômes.*

En utilisant l'invariant de Toomer $e_{I\!K}(X)$ (§ 2.2), nous prolongeons le résultat de L. Bisiaux ([2]) en montrant :

Théorème A. [§ 2.3 Prop. 2.3.1] *Si $H^*(X;\mathbb{K})$ est une algèbre à dualité de Poincaré, alors, $gldim(H_*(\Omega X;\mathbb{K}))$ est finie si et seulement si $e_{\mathbb{K}}(X) = prof(H_*(\Omega X;\mathbb{K}))$.*

Dans le cas particulier où X est dans le domaine d'Anick, une autre caractérisation des espaces $\mathbb{K}$- elliptiques de dimensions globales finies est obtenue à l'aide de la classe fondamentale de X.

Théorème B.[§ 2.3 Prop. 2.3.2] *Soit S un CW-complexe r-connexe de type fini $\mathbb{K}$-elliptique, dans le domaine d'Anick, alors, $prof(H_*(\Omega S;\mathbb{K})) = e_{\mathbb{K}}(S)$ si et seulement si $prof(H_*(\Omega S;\mathbb{K}))$ est égal au plus grand entier p tel que l'image de la classe fondamentale dans le terme E_∞ de sa suite spectrale de Milnor-Moore, est représentée par un cocycle homogène de longueur p.*

L'utilisation de cette caractérisation est rendue facile par l'intermédiaire du *modèle pur associé au modèle de X* et du résultat de A. Murillo (cf. [17]) qui fournit une expression de la classe fondamentale d'un espace admettant un modèle minimal pur. Dans le cas d'un modèle quelconque nous avons introduit une suite spectrale qui généralise à la fois la spectrale impaire de S. Halperin ([12]) et celle construite par A. Murillo ([18]). Nous l'appelons la *suite spectrale impaire-Ext-version.* Ceci nous permet d'établir :

Théorème C.[§2.4Th.2.4.4] *Soit S un CW-complexe r-connexe $\mathbb{K}$-elliptique, dans le domaine d'Anick et tel que $gldim(H_*(\Omega S;\mathbb{K})) < \infty$, alors, les images dans les termes E_∞ des suites spectrales de Milnor-Moore, des classes fondamentales de S et de son pur associé admettent un même représentant.*

Comme application de ces différentes caractérisations, nous donnons au §2.8 des exemples d'espaces X pour lesquels $gldim(H_*(\Omega X;\mathbb{K}))$ est finie et d'autres pour lesquels celle-ci est infinie.

Nous terminons enfin cette partie en traitant certaines questions devenues naturelles suite aux travaux de S. Halperin, J.M. Lemaire et d'autres sur les attachements inertes et paresseux (cf. [14] par exemple). Nous montrons:

Théorème D. [§2.7, Th.2.7.2] *Soit X un CW-complexe 1-connexe de type fini vérifiant l'une des hypothèses suivantes:*
(i): l'algbre $H_*(\Omega X;\mathbb{K})$ est noetherienne et $2 \leq gldim(H_*(\Omega S;\mathbb{K})) < \infty$,
(ii): X est $\mathbb{K}$-elliptique et $2 \leq prof(H_*(\Omega X;\mathbb{K}))$.
Alors $H_*(\Omega X;\mathbb{K})$ ne contient aucun élément inert.

L'objet de la deuxième partie de ce travail est la conjecture suivante qui est issue (sous des versions différentes) des techniques utilisées dans [10] et [23] :

Conjecture. (dite de l'omnibus): *Si $dim H^{pair}(X;\mathbf{F}_p) < \infty$ et $H_*(\Omega X;\mathbf{F}_p)$ est une algèbre de Hopf elliptique, alors l'algèbre $H^*(X;\mathbf{F}_p)$ satisfait la dualité de Poincaré.*

Tout d'abord nous montrons :

Théorème E. [Chap. 3, Th. A] *La conjecture est vraie, sous l'une des conditions suivantes :*
(i): pour tout espace p-formel lorsque p désigne un nombre premier impair.
(ii): pour tout espace $\mathbb{Q}$-faiblement formel. En particulier pour tout espace $\mathbb{Q}$-formel.
(iii): pour tout espace rationnellement quasi-fini.

Dans un second temps nous considérons un type de fibrations pour lesquelles l'espace total vérifie la conjecture, et dont la fibre possède des comportements très différents suivant la caractéristique du corps.

Théorème F. [Chap. 3, Th. B] *Soient $\mathbb{K}$ un corps et $(\mathcal{F}) : F \to X \xrightarrow{\varphi} K$, une fibration telle que K est un produit fini d'espaces d'Eilenberg-MacLane, $K = \prod_i K(\mathbb{K}, 2i)$, et pour laquelle $dimH^{pair}(X;\mathbb{K}) < \infty$. Alors,*
a) si $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$, $dimH^*(F;\mathbb{Q}) < \infty \iff dimH^*(X;\mathbb{Q}) < \infty$,
b) si $\mathbb{K} = \mathrm{F}_p$, $p > 2$, si X est p-formel et si $H_*(\Omega X; \mathrm{F}_p)$ est une algèbre de Hopf elliptique alors, pour l'action d'holonomie de ΩK sur F, $H^*(F;\mathrm{F}_p)$ est un A-module libre où A est une sous-algèbre de $H_*(\Omega K; \mathrm{F}_p)$ telle que $H_*(\Omega K; \mathrm{F}_p) \cong A \otimes H$ et $dimH < \infty$.

Dans la troisième partie nous revenons à l'étude des espaces purs. Rappelons qu'un espace topologique 1-connexe X admet un unique (à isomorphisme près) modèle de Sullivan (sur les rationnels), noté M_X. A ce modèle est associé, de manière purement algébrique, son *modèle pur* (§ 1.2.2 Def. 1.2.10), noté $\tilde{M}_X$. C'est un invariant de l'homotopie rationnelle de l'espace X. Rappelons aussi que la théorie de D. Sullivan permet d'associer à toute algèbre différentielle graduée commutative 1-connexe sur $\mathbb{Q}$, (A, d), un espace topologique 1-connexe appelé réalisation géométrique et notée $|(A, d)|$. De plus $X \to |M_X|$ est une $\mathbb{Q}$-localisation de l'espace X.

La réalisation géométrique est obtenue par composition de deux foncteurs, le premier étant celui de D. Sullivan qui associe à toute algèbre différentielle graduée commutative un ensemble simplicial et le deuxième, dû à J. W. Milnor est celui permettant de construire un CW-complexe à partir d'un ensemble simplicial ([5 § 17] pour plus de détails).

En explicitant les relations entre le modèle minimal d'un espace et la tour de Postnikov de son rationnalisé, en colaboration avec Mme Nazha El Adnani, nous obtenons une réalisation géométrique explicite du modèle pur $\tilde{M}_X$, notée $\tilde{X}$ et appelée *l'espace pur associé à X*. En un certain sens $\tilde{X}$ est une approximation du rationalisé $X_{(0)}$ de X.

Proposition [§ 4.2 Th. 4.2.4] *Soit X un CW-complexe, rationnel, simplement connexe, de type fini, alors l'espace $\tilde{X}$ est à homotopie près l'espace total d'une fibration de la forme*

$$\Pi_m K(\pi_{2m+1}(X), 2m+1) \to \tilde{X} \xrightarrow{p} \Pi_n K(\pi_{2n}(X), 2n).$$

Dans le cas où X est supposé dans le domaine d'Anick (cf. §2.1), son modèle de Sullivan $(\Lambda W, d)$ sur le corps $\mathbb{F}_p$ (cf. [13]) possède aussi un modèle pur $(\Lambda W, d_\sigma)$. Par contre dans ce cadre plus général il n'existe pas de réalisation géométrique des modèles. Toutefois en nous inspirant du cas rationnel, nous construisons un espace pur $\tilde{X}_{(p)}$ associé au p-localisé $X_{(p)}$ de l'espace X.

Théorème G. [§ 4.3 Th. 4.3.2] *Soit X un CW-complexe, simplement connexe, alors l'espace $\tilde{X}_{(p)}$ est à homotopie près l'espace total de la fibration*

$$\Pi_m K(\pi_{2m+1}(X_{(p)}), 2m+1) \to \tilde{X}_{(p)} \xrightarrow{p} \Pi_n K(\pi_{2n}(X_{(p)}), 2n).$$

Il en résulte la reformulation suivante du théorème C dans le cas rationnel:

Théorème C' *Soit X un espace r connexe et $\mathbb{Q}$-elliptique.*
Si $gldim(H_*(\Omega X;\mathbb{Q})) < \infty$, alors, les images des classes fondamentales de X et de $\tilde{X}$ dans les termes E_∞ de leurs suites spectarles de Milnor-Moore admettent un même représentant.

Références:

[1] D. Anick, *Hopf algebras up to homotopy* , J. Amer. Math. Soc. 2 (1989) 417-453.

[2] L. Bisiaux, *Depth and Toomer's invariant* , A paraître dans, Topology and its Applications.

[3] Y. Félix, *La dichotomie elliptique-hyperbolique en homotopie rationnelle,* Astérisque 176, (1989).

[4] Y. Félix, S. Halperin, J-M. Lemaire and J. C. Thomas,mod.p Loop space Homology, Invent. Math. 95 (1989) 247-262.

[5] Y. Félix, S. Halperin and J. C. Thomas, *Rational Homotopy Theory*, Preprint Université d'Angers (1997).

[6] Y. Félix, S. Halperin and J. C. Thomas, *Gorenstein spaces*, Adv in Maths 71 (1988) 92-112.

[7] Y. Félix, S. Halperin and J. C. Thomas, *Elliptic Hopf algebras,* J. London. Math. Soc. (2) 43 (1991) 545-555.

[8] Y. Félix, S. Halperin and J. C. Thomas, *Hopf algebres of polynomial growth,* J. Algebra 125 (1989) 408-417.

[9] Y. Félix, S. Halperin and J. C. Thomas, *Hopf algebras and a counterexample to a conjecture of Anick*, J. of. Algebra, 169 (1994) 176-193.

[10] Y. Félix, S. Halperin and J-C.Thomas, *The homotopy Lie algebra for finite complexes,* Publ.I.H.E.S. 56 (1983) 89-96.

[11] H. Gammelin, *Gorenstein spaces with a non zero evaluation map*, To appear in Trans. Amer. Math. Soc.

[12] S. Halperin, *Finiteness in the minimal models of Sullivan*, Trans. Amer. Math. Soc. 230 (1977), 173-199.

[13] S. Halperin, *Universal enveloping algebras and loopspace homology,* J. Pure Appl. Algebra 83 (1992) 237-282.

[14] S. Halperin and J.M. Lemaire, *The fiber of a cell attachement,* Proc. of Edinburgh Math. Soc. 38, (1995) 295-311.

[15] M. R. Hilali, Action du Tore T^n sur les espaces simplement connexes, Thèse, Univ. Louvain (1990).

[16] J. Lannes et L. Schwartz, *a propos des conjectures de Serre et Sullivan*, Invent. in Math. 83 (1986).

[17] A. Murillo, *The Top cohomology class of certain spaces*, J.Pure. App. Algebra, 84 (1993) 209-214.

[18] A. Murillo, *The evaluation map of some Gorenstien algebras*, J. Pure. Appl. Algebra 91 (1994) 209-218.

[19] D. G. Quillen, *Rational Homotopy Theory*, Ann. Math. 90, (1969), 205-295.

[20] J. P. Serre, *Cohomologie modulo 2 des comlexes d'Eilenberg-Maclane*, Comment. Math. Helv. 27, 198-232 (1953).

[21] M. Spivak, *Spaces satisfying Poincaré duality*, Topology 6 (1967), 77-102.

[22] D. Sullivan, *Infinitesimal computations in topology*, Inst. Hautes. Études Sci. Publ. Math. 47 (1978), 269-331.

[23] J-C. Thomas , *Homologie de l'espace des lacets, problèmes et questions*, J. of Pure App. Algebra 91, 355-379 (1994).

Chapitre 1. Rappels

1.1 Préliminaire algébrique

Dans cette section nous supposons que R est un anneau commutatif de caractéristique $\neq 2$. Le degré d'un élément homogène x est noté $|x|$. Les références citées avec les titres des sections sont choisies parmis d'autres (cf. Bibliographie) parce que, Primo $[FHT_1]$ contient les principaux résultats relévants de l'homotopie rationnelle avec des démontrations détaillées. Secondo [GDW], [GM] et $[H_1]$ donnent des résumés des notions utilisées. Tertio, les résultats de [HS] et [An] ne sont pas démontrés dans aucunes des références précédentes.

1.1.1 R-module gradué ($[FHT_1]$)

Un R-*module gradué* est une famille $M = \{M_i\}_{i\in \mathbf{Z}}$ de R-modules.

Une application linéaire de degré p entre deux R-modules gradués M et N est une famille d'applications R-linéaires $f_i : M_i \to N_i$ $(i \in Z)$ telle que $|f_i(m)| = |m| + p$. Nous notons

$$Hom^p_{\mathbf{R}}(M, N) = \bigoplus_{i=0}^{i=\infty} Hom_{\mathbf{R}}(M_i, N_{i+p})$$

l'ensemble de telles applications. Si en plus M est muni d'une différentielle $d : M_i \to M_{i\pm 1}$; i.e. une application R-linéaire de degrée ± 1 vérifiant $d^2 = d \circ d = 0$, alors (M, d) est un R-*module différentiel gradué* (R-mdg en abrégé). C'est un complexe, de chaînes si $|d| = -1$ et de cochaînes si $|d| = +1$. Son homologie $H(M) = Ker(d)/Im(d)$ est aussi un R-module gradué.

La *suspension* d'un R-mdg M est par définition le R-module gradué sM muni des isomorphismes $s : M_i \xrightarrow{\cong} (sM)_{i+1}$, $\forall i \in \mathbf{Z}$ et de la différentielle d définie par $d(sx) = -s(dx), \forall x \in M_i$.

Soient (M, d) et (N, d) deux R-mdg. Le R-mg

$$Hom_{\mathbf{R}}(M, N) = \bigoplus_{p=0}^{p=\infty} Hom^p_{\mathbf{R}}(M, N)$$

est un R-mdg pour la différentelle $\mathcal{D}$ définie par:

$$\mathcal{D}(f) = d_N \circ f - (-1)^{|f|} f \circ d_M.$$

En particulier le dual $Hom_{\mathrm{R}}(M, \mathrm{R})$ de (M, d) a pour différentielle $\mathcal{D}$ telle que $\mathcal{D}(f) = (-1)^{|f|+1} f \circ d_M$.

Soit maintenant (M, d) un R-mdg à gauche et (N, d) un R-mdg à droite, leur produit tensoriel $M \otimes_{\mathrm{R}} N$, gradué par:

$$(M \otimes_{\mathrm{R}} N)_i = \bigoplus_{j+k=i} (M_j \otimes_{\mathrm{R}} N_k)$$

et muni de la différentielle d définie par:

$$d(x \otimes y) = d_M(x) \otimes y + (-1)^{|x|} x \otimes d_N(y),$$

est un R-mdg.

Dans toute la suite, les notations $Hom_{\mathrm{R}}(M, N)$ et $M \otimes_{\mathrm{R}} N$ sont remplacées par $Hom(- \, , - \,)$ et $- \otimes -$ respectivement. Les R-modules gradués sont aussi considérés comme des R-mdg avec la différentielle nulle. D'autre part les R-mdg avec une graduation superieure sont obtenus avec la convention $M^i = M_{-i}$.

1.1.2 R-algèbre graduée($[FHT_1]$)

Une R-*algèbre graduée* (ag en abrégé) est un R-module gradué muni d'une famille de morphismes (i.e: applications linéaires de degrées zéro), $\varphi_{i,j} : A_i \otimes A_j \to A_{i+j}$ appelée *produit* sur A. Ce produit est supposé être associatif, avec unité $\eta(1) = 1_A \in A_0$; où $\eta : \mathrm{R} \to A$ est un morphisme de R-mdg (R étant graduée par: $\mathrm{R}_0 = \mathrm{R}$ et $\mathrm{R}_i = 0 \ \forall i \geq 1$). Si

$$\forall a, a' \in A, \quad aa' = (-1)^{|a||a'|} a'a,$$

l'algèbre A est dite *commutative* et si $A_0 = \mathrm{R}$ est dite *connexe*. Un morphisme entre deux ag A et B est un morphisme de R-modules gradués $\varphi : A \to B$ qui préserve les produits et les unités.

Si $\varepsilon : A \to \mathrm{R}$ est un morphisme d'algèbres graduées, A est dit *augmentée* par ε. Quand l'ag augmentée A est muni d'une différentielle d telle que:

$$\forall x, y \in A, \quad d(xy) = d(x)y + (-1)^{|x|} x d(y),$$

et ε commute avec les différentielles, (A, d) devient une *algèbre différentielle graduée* (adg en abrégé) augmentée. Il s'ensuit que $Im(d)$ est un idéal de la sous algèbre graduée $Ker(d)$. D'où $H(A, d) = Ker(d)/Im(d)$ possède une structure d'algèbre graduée. Si $H^0(A, d) = \mathrm{R}$ l'adg A est dite *c-connexe*.

Exemple 1.1.1 Soit (V, d) un R-module différentiel gradué. L'*algèbre tensorielle* sur (V, d) est l'algèbre libre

$$T(V) = \bigoplus_{i=0}^{\infty} T^i(V) = \bigoplus_{i=0}^{\infty} V^{\otimes i}$$

munie de la dérivation d de degré $+1$ induite par d et telle que $d \circ d = 0$.

Exemple 1.1.2 L'adg *commutative libre* $(\Lambda V, d)$ est l'algèbre quotient

$$T(V)/(v \otimes w - (-1)^{|v||w|} w \otimes v).$$

Cette algèbre est graduée par $\Lambda^i V = \pi(T^i(V))$; où $\pi : T(V) \to \Lambda(V)$ désigne la projection canonique. Si (W, d) est un autre R-mdg, alors,

$$\Lambda(V \oplus W) = \Lambda V \otimes \Lambda W.$$

Module différentiel gradué sur une algèbre

Un module différentiel gradué sur une adg (A, d) est un R-mdg (M, d) muni d'une application R-linéaire $\varphi : A \otimes M \to M$, notée $\varphi(a \otimes m) = am$ et telle que

$$(aa')m = a(a'm), \; 1m = m \quad \text{et} \quad d(am) = (da)m + (-1)^{|a|} a(dm).$$

Une application linéaire de degré p entre (A, d)-modules différentiels gradués est un élément $f \in Hom^p(M, N)$ tel que

$$f(am) = (-1)^{|f||a|} a f(m).$$

L'ensemble de ces applications, noté $Hom_{\mathbf{A}}(M, N)$ admet une structure de (A, d)-mdg pour la différentielle $\mathcal{D}$ définie ultérieurement sur $Hom(M, N)$. Soit d'autre part (Q, d) (resp. (M, d)) un (A, d)-mdg à gauche (resp. à droite). Leur produit tensoriel sur A est le complexe quotient

$$Q \otimes_A M = Q \otimes M/(qa \otimes m - q \otimes am).$$

Muni de la différentielle d déja définie sur $Q \otimes M$, il devient un (A, d)-mdg.

Une équivalence de chaînes entre deux A-mdg (M, d) et (N, d) est un morphisme $f : (M, d) \to (N, d)$ d'adg tel qu'il existe un autre morphisme de A-mdg $g : (N, d) \to (N, d)$ pour lequel $f \circ g \sim id_N$ (i.e. $\exists h : (N, d) \to (N, d)$ application linéaire entre adg de degré $+1$, avec $f \circ g - id_N = d(h) = hd + dh$) et $g \circ f \sim id_M$. Il en résulte que $H(f)$ est un isomorphisme de A-mg. Quand c'est le cas, nous dirons que f est un *quasi-isomorphisme.*

1.1.3 Coalgèbre différenielle graduée ([FHT_1])

Une *coalgèbre différenielle graduée* (cdg en abrégé) sur R est un R-module gradué (C, d) muni d'un *coproduit* $\Delta : C \to C \otimes C$ coassociatif et d'une *counité* $\varepsilon : C \to \mathrm{R}$ qui commutent avec les différentielles.

Notons $\bar{C} = Ker(\varepsilon)$. Si C est *coaugmentée* par l'inclusion $\eta : \mathrm{R} \hookrightarrow C$ (i.e. η est un morphisme de cdg) de sorte que $C = \mathrm{R} \oplus \bar{C}$, alors, pour tout $x \in \bar{C}$ on a $\Delta x = x \otimes 1 + 1 \otimes x + \bar{\Delta}(x)$; $\bar{\Delta}(x) \in \bar{C} \otimes \bar{C}$. x est dit *primitif* si $\bar{\Delta}(x) = 0$ et si pour tout $c \in C$ on a

$$\Delta c = \sum_i c_i' \otimes c_i'' = \sum_i (-1)^{|c_i'||c_i''|} c_i'' \otimes c_i',$$

C est dite *cocommutative*.

Remarque 1.1.3 soit (C, d) une cdg coaugmentée. Son dual $C^\vee = Hom(C, \mathrm{R})$ est une adg augmentée via l'application $C^\vee \otimes C^\vee \to C^\vee$ définie par:

$$(f \otimes g)(x \otimes y) = (-1)^{|g||x|} f(x) \otimes g(y); \quad \forall f, g \in C^\vee; \ \forall x, y \in C.$$

Exemple 1.1.4 Considérons sur $T(V)$ le coproduit,

$$\Delta([v_1|\ldots|v_n]) = 1 \otimes [v_1|\ldots|v_n] + \textstyle\sum_{p=1}^{p=n-1} [v_1|\ldots|v_p] \otimes [v_{p+1}|\ldots|v_n] \\ + [v_1|\ldots|v_n] \otimes 1;$$

où $[v_1|\ldots|v_n] = v_1 \otimes \ldots \otimes v_n \in T^n(V)$. La différentielle de V prolongée en une dérivation sur $T(V)$, la counité $\varepsilon : T(V) \to \mathrm{R}$ et l'inclusion $\eta : \mathrm{R} \hookrightarrow T(V)$ font de $(T(V), d)$ une cdg *libre* et coaugmentée. En particulier l'ensemble des éléments primitifs coincide avec V.

Exemple 1.1.5 Soit (A, d) une adg augmentée de type fini sur un corps $I\!\!K$ (i.e chaque A_i est un $I\!\!K$-module finiment engendré), alors son dual $(A^\vee, d^\vee)$ est une cdg coaugmentée.

1.1.4 Algèbre de Hopf graduée(([FHT_1]et[$H_1.App.$])

Une *algèbre de Hopf graduée* (ahg en abrégé) est un R-module gradué $(A, \varphi, \mu, \varepsilon, \eta)$ avec (A, φ, η) une R-algèbre graduée augmentée par ε, (A, μ, ε) une coalgèbre graduée coaugmentée par η et μ un morphisme d'algèbres (garduées). L'ahg A est *connexe* si $A_0 = \mathrm{R}$, *commutative* (resp. *cocommutative*) si φ (resp. μ) est commutative (resp. cocummutative).

Exemple 1.1.6 Considérons sur la coalgèbre graduée libre $T(V)$, le *shuffle produit* donné par:

$$[v_1|\ldots|v_p] * [v_{p+1}|\ldots|v_{p+q}] \mapsto \sum_{\sigma\in S_{p,q}} \varepsilon_\sigma [v_{\sigma^{-1}_{(1)}}|\ldots|v_{\sigma^{-1}_{(p+q)}}];$$

où $S_{p,q} = \{\sigma \in S_{p+q}/\sigma(1) < \ldots < \sigma(p) \text{ et } \sigma(p+1) < \ldots < \sigma(p+q)\}$ et le signe ε_σ; où $\sigma = (i_1, i_2)\ldots(i_{n-1}, i_n)$ désigne le produit des $\varepsilon_{(i_k,i_{k+1})}$ définis par:

$$\varepsilon_{(i_k,k+1)}[v_1|\ldots|v_n] = (-1)^{|v_{i_k}||v_{i_{k+1}}|}[v_1|\ldots|v_{i_{k+1}}|\ldots|v_{i_k}|\ldots|v_n].$$

Ce produit fait de $T(V)$ une ahg commutative.

Notons d'autre part $\Gamma^i(V)$ le sous module de $T^i(V)$ dont les éléments vérifient $\sigma.(v_1 \otimes \ldots \otimes v_i) = \varepsilon_\sigma(v_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \ldots \otimes v_{\sigma^{-1}(i)})$, pour tout $\sigma \in S_i$. Posons ensuite pour tout $v_{2k} \in V_{2k}$, $w \in V_{2k+1}$ et $n \geq 2$,

$$\begin{array}{l} \gamma^0(v) = 1, \quad \gamma^1(v) = v \text{ et } \quad \gamma^n(v) = [v|\ldots|v]. \\ \gamma^0(w) = 1, \quad \gamma^1(w) = w \text{ et } \quad \gamma^n(w) = 0. \end{array}$$

Ces éléments vérifient les "*formules de Cartan*":

$$\begin{array}{l} \gamma^n(v+v') = \sum_{i=0}^n \gamma^i(v)\gamma^{n-i}(v'), \quad v, v' \in V_{2k}, \\ \gamma^i(v)\gamma^j(v) = \binom{i+j}{i}\gamma^{i+j}(v), \ v \in V_{2k}. \end{array}$$

et leurs produits finis

$$\gamma^{k_1}(v_1)\gamma^{k_2}(v_2)\ldots\gamma^{k_r}(v_r), \ r \geq 0, \ k_i \geq 0,$$

forment une base de $\Gamma(V) = \bigoplus_{i=0}^{i=\infty} \Gamma^i(V)$ en tant que R-mg. Nous avons alors:

$$\Gamma(V) = <\gamma^k(v), \ v \in V, \ k_i \geq 0>$$

en tant q'ag. Muni d'autre part de la structure de coalgèbre induite par celle de $T(V)$, elle devient une ahg appelée algèbre *des puissances divisées*. En plus nous avons un isomorphisme d'ahg:

$$\Gamma(V) \otimes \Gamma(W) \cong \Gamma(V \oplus W).$$

D'autre part si V est de type fini, en passant au dual nous obtenons les isomomorphimes d'ahg suivants:

$$\Gamma(V) \cong (\Lambda V^\vee)^\vee \quad \text{et} \quad \Lambda(V) \cong (\Gamma(V))^\vee.$$

1.1.5 Algèbre de Lie graduée ($[FHT_1]et[H_1.\S 1]$)

Une *algèbre de Lie graduée* (alg en abrégé) est un R-module gradué $L = \oplus_{i\geq 0} L_i$, muni d'une application R-bilinéaire de degré zéro appelée *crochet* et notée

$$[\ ,\ ] : L \otimes L \to L$$

telle que pour tout $x, y \in L$,

$$\begin{aligned}
[x,y] &= -(-1)^{|x||y|}[y,x], \\
[x,[y,z]] &= [[x,y],z] + (-1)^{|x||y|}[y,[x,z]], \\
[x,[x,x]] &= 0, \quad x \in L_{2k+1}.
\end{aligned}$$

Si L est en plus muni d'une différentielle ∂ telle que

$$\partial[x,y] = [\partial x, y] + (-1)^{|x|}[x, \partial y],$$

$(L, [\ ,\ ], \partial)$ ou tout simplement (L, ∂) est appelée algèbre de Lie différentielle graduée (aldg en abrégé).

L'*algèbre envellopante* de (L,∂) notée $(U(L),\theta)$ est le R-module quotient $U(L) = T(L)/(x \otimes y - (-1)^{|x||y|} y \otimes x - [x,y])$ muni de la différentielle θ, prolongement de ∂ en une dérivation de degré $+1$ et vérifiant $\theta^2 = 0$. Elle possède à la fois une structure d'ahg induite par celle de $T(L)$ (la structure de coalgèbre etant celle pour laquelle L est primitif) et une structure d'aldg pour le crochet $[x,y] = x \otimes y - (-1)^{|x||y|} y \otimes x$. L'inclusion $i : (L,\delta) \to (U(L),\theta)$ est alors un morphisme d'aldg induisant en homologie

$$H(i) : H(L,\partial) \to H(UL,\theta).$$

Théorème 1.1.7 *($[FHT_1$. Th 20.7$]$) (i): Si* R *est un corps de caractéristique zéro,*

$$UH(i) : U(H(L,\partial)) \to H(U(L),\theta))$$

est un isomorphisme d'ahg.

(ii): Tout morphisme d'aldg $\varphi : (L,\partial) \to (L',\partial')$ est un quasi-isomorphisme d'aldg si et esulement si $U(\varphi) : (UL,\theta) \to (UL',\theta')$ est un quasi-isomorphisme d'ag.

Exemple 1.1.8 Soient $I\!K$ un corps de caractéristique zero, $(A,\varphi,\mu,\varepsilon,\eta)$ une ahg et x et $y \in A$ deux éléments primitifs. En munissant A de sa structure d'alg définie par le crochet

$$[x,y] = xy - (-1)^{|x||y|} yx,$$

nous avons,

$$\begin{aligned}\Delta([x,y]) &= \Delta(xy-(-1)^{|x||y|}yx)\\ &= \Delta x\Delta y-(-1)^{|x||y|}\Delta y\Delta x\\ &= [x\otimes 1+1\otimes x, y\otimes 1+1\otimes y]\\ &= [x,y]\otimes 1+1\otimes [x,y].\end{aligned}$$

Ceci entraîne que le sous espace des éléments primitifs noté $P_{\bullet}(A)$ est une algèbre de Lie graduée.

A est dite *primitivement engendrée* si elle est engendrée en tant qu'algèbre par une base de $P_{\bullet}(A)$. D'après ([MM]) ceci est équivalent à la cocommutativité de Δ.

Exemple 1.1.9 Munissant l'adg $T(V)$ de sa structure d'alg induite par le produit, l'*algèbre de Lie libre* $\mathbb{L}(V)$ sur V est la sous algèbre de Lie de $T(V)$ engendrée par V. Elle est graduée par $\mathbb{L}(V)=\oplus_k(\mathbb{L}(V)\cap T^k(V))$ et vérifie

$$T(V)=U\mathbb{L}(V).$$

Munie de la différentielle induite, $\mathbb{L}(V)$ devientt une aldg.

Soit d'autre part (L,d) une aldg. Sur ΛsL nous définissons d_0 et d_1 par ([FHT_1. 21(b)]):

$$\begin{aligned}d_0(sx_1\dots sx_r) &= -\sum_{i=1}^{k}(-1)^{n_i}sx_1\dots sdx_i\dots sx_r\\ d_1(sx_1\dots sx_r) &= \sum_{1\le i<j\le r}(-1)^{|sx_i|}(-1)^{n_{ij}}s[x_i,x_j]\dots\widehat{sx_i}\dots\widehat{sx_j}\dots sx_r;\end{aligned}$$

où $n_i=\sum_{j<i}|sx_j|$ et $sx_1\dots sx_r=(-1)^{n_{ij}}sx_isx_jsx_1\dots sx_r$.

Nous savons alors que $d=d_0+d_1$ est une dérivation de coalgèbre graduée de carré nul et par suite $(\Lambda sL,d)$ est une coalgèbre de chaînes. Elle est notée $(C_{\bullet}(L),d)$ et est appelée la construction de *Cartan-Eilenberg-Chevally*. Cette construction est fonctorielle et si L est libre de type fini, son dual $(C^{\bullet}(L),d^{\vee})$ est une adg commutative augmentée.

1.1.6 Bar et Cobar constructions ([FHT_1])

Soit (A,d) une adg. La *Bar construction* sur A est la coalgèbre graduée coaugmentée $B(A)=T(s\bar{A})$, muni de la différentielle $d=d_0+d_1$ avec

$$\begin{aligned}&d_0([sv_1|\dots|sv_k])=-\sum_{i=1}^{k}(-1)^{n_i}[sv_1|\dots|sd_Av_i|\dots|sv_k],\\ &d_1([sv])=0,\\ &d_1([sv_1|\dots|sv_k])=\sum_{i=2}^{k}(-1)^{n_i}[sv_1|\dots|sv_{i-1}sv_i|\dots|sv_k]\ k\ge 2;\end{aligned}$$

où $n_i = \sum_{i<j} |sv_j|$.

Théorème 1.1.10 *([FHT_1. Th 19.1]): Supposons que V est un $\mathbb{R}$-module libre et soit $(T(V), d)$ muni de sa structure d'adg, alors le morphisme*

$$\rho : (B(TV, d), d) \to (sV \oplus \mathbb{R}, \bar{d});$$

(où $\bar{d}_V sx = -sd_V x$) défini par $\rho(1) = 1$, $\rho(sx) = sx$, $\rho[s(x_1 \otimes \ldots \otimes x_r)] = 0$, $r \geq 2$ et $\rho = 0$ sur $B^{\geq 2}(TV)$ est un quasi-isomorphisme de coalgèbres graduées.

Soit (C, d) une cdg de counité ε. Sur $\bar{C} = Ker(\varepsilon)$ nous définissons la diagonale réduite notée, $\bar{\Delta}$ par $\bar{\Delta}c = \Delta c - c \otimes 1 - 1 \otimes c$. La *Cobar construction* sur (C, d) est l'adg augmentée, notée $\Omega(C)$ définie par $\Omega(C) = T(s^{-1}\bar{C})$ et de différentielle $d = d_0 + d_1$ avec

$$\begin{aligned} d_0(s^{-1}x) &= -s^{-1}dx, \\ d_1(s^{-1}x) &= \sum_i (-1)^{|x_i|} s^{-1}x_i \otimes s^{-1}y_i, \ x \in \bar{C}; \end{aligned}$$

où $\bar{\Delta}x = \sum_i x_i \otimes y_i$.

Théorème 1.1.11 *([FHT_1. Th. 21.7]): Soit (L, δ) une aldg, alors il existe un quasi-isomorphisme de cdg*

$$\lambda : C_*(L) \xrightarrow{\simeq} BU(L)$$

donné par $\lambda(sx_1 \ldots sx_r) = \sum_{\sigma \in S_r} \varepsilon_\sigma [x_{\sigma(1)}| \ldots |x_{\sigma(r)}]$.

Corollaire 1.1.12 *Soit V un $\mathbb{R}$-mdg, alors*

$$(C_*(\mathbb{L}(V)), d) \xrightarrow{\simeq} (sV \oplus \mathbb{R}, \bar{d}).$$

Le résultat suivant dû à Adams est parmi les plus solicité dans l'ètude de l'espace des lacets de X.

Théorème 1.1.13 *([Ad]): Il existe un quasi-isomorphisme d'adg*

$$\Omega C_*(X, \mathbb{R}) \xrightarrow{\simeq} C_*(\Omega X; \mathbb{R}).$$

1.1.7 Résolution semi-libre ([FHT_1]et[H_1]

Un mdg (P, d) sur une adg (A, d) est *A-libre* si $P \cong A^{\#} \otimes V$; où $A^{\#}$ désigne le A-module sous-jacent de A et V désigne un R-module gradué libre. Dans ce cas une base de V est appelée base du A-module P.

Un (A, d)-module (P, d) est une *extension semi-libre* d'un autre (A, d)-module (M, d) si P est l'union d'une famille croissante de (A, d) sous-modules gradués: $P(-1) = (M, d) \subset P(0) \subset \ldots$, tels que les quotients $P(k)/P(k-1)$, $k \geq 0$, sont A-libre sur une base de cycles. Si $M = 0$, nous dirons que (P, d) est un *(A, d)-module semi-libre.*

Proposition 1.1.14 *Un (A, d)-module est semi-libre si et seulement si il est $A^{\#}$-libre sur une base bien ordonnée $\{e_\alpha\}$ telle que $de_\alpha = \sum\limits_{\beta<\alpha} \lambda_\beta e_\beta$.*

Soit $f : (M, d) \to (N, d)$ un morphisme de (A, d)-mdg. une *résolution semi-libre* de f est la donnée d'une extension semi-libre (P, d) de (M, d) et d'un quasi-isomorphisme de (A, d)-mdg $(P, d) \xrightarrow{\simeq} (N, d)$ dont la restriction à (M, d) est f.

Une résolution semi-libre (Q, d) d'un (A, d)-mdg (N, d) est une résolution semi-libre de $0 \to (N, d)$. En particulier si $(N, d) = (\mathrm{R}, 0)$, nous dirons que $(Q, d) \xrightarrow{\simeq} (\mathrm{R}, 0)$ est une *clôture acyclique* de l'adg (A, d).

Exemple 1.1.15 *:* Soit $(\Lambda V, d)$ une adgc 1-connexe ($V^0 = V^1 = 0$) de type finie sur un corps $\mathbb{K}$. Il existe ([FHJLT]et [H_1]) une adg acyclique $(\Lambda V \otimes \Gamma sV, D)$; où D est une Γ-dérivation telle que $D(sx_i) = x_i + s(dx_i)$; $s(dx_i) \in \Lambda V_{<i} \otimes \Gamma sV_{<i}$ où $V_i =< x_j; \ j < i >$. Puisque $(\Lambda V \otimes \Gamma sV, D)$ est un $(\Lambda V, d)$-module semi-libre; $(\Lambda V \otimes \Gamma sV, D) \xrightarrow{\simeq} \mathbb{K}$ est une *clôture acyclique* de $(\Lambda V, d)$.

Remarque 1.1.16 (i): Supposons que (M, d) est (A, d)-semi-libre pour la filtration $\{M(k)\}$ telle que $M(k)/M(k-1) = \mathrm{R} \otimes V(k); \forall k \geq 0$, alors $M = \mathrm{R} \otimes (\oplus_{k=0}^{\infty} V(k))$ et $d : V(k) \to M(k-1)$.

(ii): Soit (M, d) un R-mdg. Nous dirons que (M, d) est R-semi-libre si il l'est sur $(\mathrm{R}, 0)$ considéré comme adg.

Une telle situation est réalisée dans deux cas particuliers importants; a savoir:

-M est R-libre et R est un anneau principal ou

-M est R-libre et $M = \bigoplus_{i \geq -k} M_i$.

En effet dans le premier cas, nous utilisons la filtration à deux termes $\{0\} \subseteq Ker(d) \subseteq M$ et dans le second nous considèrons la filtration $\{M(i) = \bigoplus_{j \leq i-k} M_j\}$.

(iii) Si $(A,d) \to (B,d)$ est un morphisme d'adg et (M,d) est (A,d)-semi-libre, alors $(B \otimes_A M, d)$ est (B,d)-semi-libre.

Lemme 1.1.17 *([FHT_1]. Prop. 6.4])*
(i)(Lemme de relèvement): Etant donné un diagramme de (A,d)-mdg,

$$\begin{array}{ccc} & & (P,d) \\ & & \simeq\downarrow \eta \\ (M,d) & \xrightarrow{\psi} & (Q,d) \end{array}$$

avec (M,d) semi-libre, alors il existe un morphisme $\varphi : (M,d) \to (P,d)$ unique à homotopie près tel que $\eta \circ \varphi \sim \psi$.

(ii): Si (Q,d) est (A,d) semi-libre alors $Hom_A(Q,-)$ préserve les quasi-isomorphismes d'adg.

l'unicité dans la proposition suivante résulte de lemme (i).

Proposition 1.1.18 *([FHT_1. Prop. 6.6]): Tout morphisme $f : (M,d) \to (N,d)$ de (A,d)-mdg admet une résolution semi-libre $(P,d) \xrightarrow{\simeq} (N,d)$. En particulier tout (A,d)-mdg admet une résolution semi-libre. En plus cette résolution est unique à homotopie près.*

Comme conséquence à cette porposition, nous avons les extensions suivantes des foncteurs Ext et Tor.

Soit (M,d) un (A,d)-mdg à gauche et $(P,d) \xrightarrow{\simeq} (M,d)$ une résolution semi-libre. Si (N,d) désigne un autre (A,d)-mdg à droite, les foncteurs $\mathcal{E}xt$ et $\mathcal{T}or$ *différentiels* sont définis par:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}xt_A(M,N) &= H(Hom_A(P,N)), \\ \mathcal{T}or^A(M,N) &= H(P \otimes_A N). \end{aligned}$$

En particulier et compte tenus de certaines propriétés qui généralisent le lemme (ii), le foncteur Ext vérifi

$$\mathcal{E}xt_A(M,N) = \mathcal{E}xt_A(N,M);$$

où M et N sont deux (A,d)-mdg. En plus $\mathcal{E}xt_A(M,N)$ est covariant en N et est contravariant en M et A.

1.2 Les modèles

Dans cette section nous considérons (sauf mension contraire) comme anneau de coefficient un corps $I\!K$ de caractéristique zéro. Rappelons que le complexe de cochaînes $C^*(X;I\!K)$ est une adg non commutative quoiqu'elle est homotopiquement commutative.

1.2.1 Modèle de Sullivan ($[FHT_1]$)

La théorie de Sullivan consiste à introduire pour tout espace topologique X ayant le type d'homotopie d'un CW-complexe connexe par arcs, de type fini, une adgc de cochaînes notée $A_{PL}(X)$ et une suite de quasi-isomorphismes

$$C^*(X;I\!K) \xrightarrow{\simeq} D(X) \xleftarrow{\simeq} (A_{PL}(X);I\!K);$$

où $D(X)$ est une algèbre de cochaînes intermèdiaire.

La construction de l'adgc $A_{PL}(X)$ est inspérée de celle des formes différentielles de De Rham. Notons $(A_{PL})_n$ l'adgc de cochaînes définie par

$$(A_{PL})_n = \frac{\Lambda(t_0, ..., t_n, y_0, ..., y_n)}{(\sum_i t_i - 1, \sum_i y_i)}, \quad n \geq 0,$$

avec $|t_i| = 0$, $|y_i| = 1$, $dt_i = y_i$ et $dy_i = 0$. Cette adgc est isomorphe à l'adgc $(\Lambda(t_1, ..., t_n, y_1, ..., y_n), d)$; où d est donné par $dt_i = y_i$ et $dy_j = 0$, $1 \leq i \leq n$. Considérons d'autre part les morphismes face et dégénerecence: $\partial_i : (A_{PL})_{n+1} \to (A_{PL})_n$ et $s_j : (A_{PL})_n \to (A_{PL})_{n+1}$ définis par:

$$\partial_i : t_k \to \begin{cases} t_k, & k < i, \\ 0, & k = i, \\ t_{k-1} & k > i. \end{cases}$$
$$s_j : t_k \to \begin{cases} t_k, & k < j, \\ t_k + t_{k+1}, & k = j, \\ t_{k+1}, & k > j. \end{cases}$$

Avec ces morphismes $(A_{PL} = \bigoplus_{n\geq 0}(A_{PL})_n, d, \partial, s)$ est une algèbre de cochaînes simpliciales.

Soit $Sing(X)$ le complexe singulier de X. $A_{PL}(X)$ est alors définie par

$$A^m_{PL}(X) = [Sing(X), (A_{PL})_m],$$

ensemble de tous les morphismes simpliciaux de $Sing(X)$ dans $(A_{PL})_m$. Plus explicitement un tel morphisme Φ associe à tout $\sigma \in Sing^k(X)$ l'élément $\Phi_\sigma \in ((A_{PL})_m)^k$ tel que

$$\Phi_{\partial_i(\sigma)} = \partial_i(\Phi_\sigma),\ \Phi_{s_j\sigma} = s_j\Phi_\sigma \text{ et } (d\Phi)_\sigma = d(\Phi_\sigma).$$

Munie de la structure d'algèbre définie par $(\Phi.\Psi)_\sigma = \Phi_\sigma.\Psi_\sigma$, $A_{PL}(X)$ devient une algèbre de cochaînes simpliciales.

Une autre algèbre de cochaînes simpliciale

Soit $(C_{PL})_n = C^*(\Delta[n])$ l'algèbre des cochaînes de $\Delta[n]$; où $(\Delta[k])_m \subseteq S_m(\Delta^k)$; $k \geq 0$ consiste en les m-simplexes linéaires de la forme $\sigma =< e_{i_0}, \dots e_{i_m} >$, avec $0 \leq i_0 \leq \dots \leq i_m \leq k$.

Les morphismes face et dégénérecence sont dans ce cas induits par $\lambda_i : \Delta_k \to \Delta_{k+1}$ et $e_j : \Delta_{k+1} \to \Delta_k$ définis par

$$\begin{aligned} \lambda_i(< e_0, \dots, e_{k+1} >), &= < e_0, \dots, \hat{e}_i, \dots, e_{k+1} > \\ e_j(< e_0, \dots e_k >) &= < e_0, \dots, e_j, e_j, \dots, e_{k+1} > . \end{aligned}$$

Considérons l'algèbre de cochaînes simpliciales

$$D = (\bigoplus_{n\geq 0}((A_{PL})_n \otimes (C_{PL})_n),\ \partial_i \otimes \lambda_i,\ s_j \otimes e_j,\ d)).$$

et définissons $D(X)$ et $C_{PL}(X)$ de la même façon que $A_{PL}(X)$, nous avons alors:

Théorème 1.2.1 *([FHT_1. Th. 10.9 .])Pour tout espace topologique X, il existe une suite de quasi-isomorphismes de cochaînes simpliciales*

$$C^*(X) \overset{\simeq}{\to} D(X) \overset{\simeq}{\leftarrow} A_{PL}(X).$$

Ce théorème entraîne entre autre que $A_{PL}(X)$ est un modèle algèbrique de $C^*(X)$.

1.2.2 Modèle minimal ([FHT_1]et[GDW])

Une adgc $(\mathcal{M}, d)$ est un *KS-complexe* s'il existe une famille $V = \{x_\alpha, \alpha \in \mathcal{A}\}$ avec $\mathcal{A}$ un ensemble bien ordonné tel que:

(i) $\mathcal{M} = \Lambda(V)$,

(ii) $\forall\alpha \in \mathcal{A}, dx_\alpha \in \Lambda(V_{<\alpha})$; où $V_{<\alpha} =< x_\beta, \beta \in \mathcal{A}$ et $\beta < \alpha >$

$\mathcal{M}$ est dite *minimal*, si en plus

(iii) $|x_\alpha| > 0 \ \forall \alpha \in \mathcal{A}$ et

(iv) $|x_\beta| < |x_\alpha| \Longrightarrow \beta < \alpha$

$\mathcal{M}$ est dite *minimal*.

Remarque 1.2.2 Si $\mathcal{M} = (\Lambda V, d)$ est minimal, alors $d(\bar{\mathcal{M}}) \subseteq \bar{\mathcal{M}}.\bar{\mathcal{M}}$ avec $\bar{\mathcal{M}} = Ker(\varepsilon : \mathcal{M} \to \mathbb{Q})$. Réciproquement, si $\mathcal{M}$ est 1-connexe, $\mathcal{M}$ est alors minimal si et seulement si $d(\bar{\mathcal{M}}) \subseteq \bar{\mathcal{M}}.\bar{\mathcal{M}}$.

Definition 1.2.3 Soit (A, d) une adgc. Un *modèle* de A est un KS-complexe $\mathcal{M}$ muni d'un quasi-isomorphisme $\mathcal{M} \xrightarrow{\cong} A$. Ce modèle est dit *minimal* si $\mathcal{M}$ est minimal.

Notons ∂_0, $\partial_1 : (A^\bullet_{PL})_1 = (\Lambda(t, dt), \partial) \to I\!K$, les morphismes définis par: $\partial_0(t) = 0$ et $\partial_1(t) = 1$.

Definition 1.2.4 Deux morphismes d'adgc $f, g : (A, d) \to (B, d)$ sont homotopes (en abrégé: $f \sim g$) s'il existe une homotopie $H : A \to B \otimes (A_{PL})_1$ tel que $(1_B \otimes \partial_0)H = f$ et $(1_B \otimes \partial_1)H = g$. Si A et B sont augmentées, f et g doivent préserver les augmentations et dans ce cas $B \otimes (A_{PL})_1$ est remplacée par $B \bar{\otimes} (A_{PL})_1 = I\!K \otimes I\!K \oplus \bar{B} \otimes (A_{PL})_1 \subseteq B \otimes (A_{PL})_1$.

Plusieurs théorèmes d'existence et d'unicité reposent sur le lemme suivant. D'où son importance dans toute la suite.

Lemme 1.2.5 *([FHT_1. Lemme 12.4]) (i): Considérons le diagramme commutatif suivant:*

$$\begin{array}{ccc} & & (A, d) \\ & & \eta \downarrow \simeq \\ (\Lambda V, d) & \xrightarrow{\psi} & (C, d) \end{array}$$

dans lequel η est un quasi-isomorphisme et $(\Lambda V, d)$ est un KS-complexe. Alors il existe un morphisme φ tel que $\eta\varphi \sim \psi$.

(ii): Si η est surjectif, le morphisme φ vérifie $\eta\varphi = \psi$.

Preuve (Dans le cas où η est surjective): Nous pouvons supposer $V = \bigcup_{k \geq 0} V(k)$ avec $V(k) = \bigoplus_{j \leq k} V_k = V(k-1) \oplus V_k$ et $d : V_k \to V(k-1)$. Supposons φ construite sur $V(k-1)$ et fixons $\{x_\alpha\}$ une base de V_k. Nous avons alors $d(x_\alpha) \in V(k-1)$, ce qui entraîne que $\varphi(d(x_\alpha))$ est bien défini. Comme $d(\varphi(d(x_\alpha)) = \varphi(d^2(x_\alpha)) = 0$ et $\eta\varphi(d(x_\alpha)) = d\psi(x_\alpha)$; η est un quasi-isomorphisme implique donc que $[\varphi(d(x_\alpha)] = 0$. Il existe alors $a_\alpha \in A$ tel que $\varphi(d(x_\alpha)) = da_\alpha$ et par consequent $d\eta a_\alpha = d\psi x_\alpha$ entraîne que

$d(\eta a_\alpha - \psi x_\alpha) = 0$. Comme $H^*(\eta)$ est surjective, il existe a'_α tel que $[\eta a_\alpha - \psi x_\alpha] = [\eta a'_\alpha]$; i.e. $\eta a_\alpha - \psi x_\alpha = \eta a'_\alpha + dc_\alpha$ pour un certain $c_\alpha \in C$. Utilisant par suite la surjection de η, il existe $a''_\alpha \in A$ tel que $c_\alpha = \eta a''_\alpha$. Il en résulte que $\psi(x_\alpha) = \eta(a_\alpha - a'_\alpha - da''_\alpha)$ avec $da'_\alpha = 0$. En posant $\varphi(x_\alpha) = \hat{a}_\alpha$; où $\hat{a}_\alpha = a_\alpha - a'_\alpha - da''_\alpha$, nous avons alors $\psi(x_\alpha) = \eta\hat{a}_\alpha$ et $d(\hat{a}_\alpha) = \varphi(dx_\alpha)$. Ceci permet de prolonger linéairement φ à V_k. □

Théorème 1.2.6 *[FHT_1, Prop. 12.9]Soit (A, d) une adgc c-connexe (i.e. $H^0(A) = 0$), alors,*

(i) Il existe un modèle minimal $(\mathcal{M}, d)$ de (A, d).

(ii) sif : $\mathcal{M} \to A$ et $g : \mathcal{N} \to A$ sont deux modèles minimaux de A, alors il existe un quasi-isomorphisme $\phi : \mathcal{M} \xrightarrow{\simeq} \mathcal{N}$ tel que $g\phi \sim f$.

Corollaire 1.2.7 *: Si X est un espace topologique connexe par arcs, alors il existe un modèle minimal $(\mathcal{M}(X), d) \to A_{PL}(X)$ unique à homotopie près.*

Puisque toute équivalence d'homotopie induit un quasi-isomorphime, la proposition suivante entraîne que le modèle minimal est aussi unique à isomorphisme près.

Proposition 1.2.8 *Si $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ sont deux adg minimales et si $\phi : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ est un quasi-isomorphisme, alors ϕ est un isomorphisme.*

Signalons aussi que le modèle minimal d'une adg n'est pas fonctoriel, mais il l'est à homotopie près.

Remarque 1.2.9 Un autre volet de la théorie de Sullivan permet d'associer à toute agdc minimal simplement connexe $(\Lambda V, d)$ un CW-complexe noté $|(\Lambda V, d)|$, via la construction de Milnor. Cette construction est adjointe à celle de $A_{PL}(X)$; où X est un espace rationnel simplement connexe.

Definition 1.2.10 *([H_2])* Soit $(\Lambda V, d)$ un modèle minimal, une autre différentielle sur V notée d_σ est obtenue de la manière suivante:

Si $Q = V^{pair}$ et $P = V^{impair}$, nous posons $d_\sigma(Q) = 0$ et $(d - d_\sigma)(P) \subseteq \Lambda Q \otimes \Lambda^+ P$; où $\Lambda^+ P = \Lambda^{\geq 1} P$. L'algèbre $(\Lambda V, d_\sigma)$ ainsi obtenue est appelée le *modèle pur* associé à $(\Lambda V, d)$.

Si X est un CW-complexe simplement connexe de modèle minimal $(\Lambda V, d)$ le , l'*espace pur* associé est par définition le CW-complexe $|(\Lambda V, d_\sigma)|$.

Relation avec la tour de Postnikov ([GM])

Dans cette partie nous supposons que $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ et l'espace X est supposé être rationnel (i.e. $\forall i \geq 0$, $\pi_i(X)$ est un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel).

Definition 1.2.11 (i): Soit A une adg sur le corps des rationnel $\mathbb{Q}$. Une extension de Hirsh de A est une adg $(A \otimes \Lambda(V_k), d)$; où V_k est un espace vectoriel gradué homogène de degré k, de dimension finie et tel que $d : V_k \to A^{k+1}$.

(ii): Deux extensions de Hirsh $(A \otimes \Lambda(V_k), d)$ et $(A \otimes \Lambda(V_k'), d')$ sont équivalentes si il existe un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} & (A \otimes \Lambda V_k, d) \arrow[d, "\varphi"] \\ A \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & (A \otimes \Lambda(V_k'), d') \end{tikzcd}$$

avec φ un isomorphisme.

Nous obtenons ainsi une relation d'équivalence dont les classes sont en correspondence biunivoque avec les classes $[d] \in H^{k+1}(A; V^{\vee})$.

Proposition 1.2.12 *Si $\mathcal{M}$ est une adg minimale et $\mathcal{M}(n)$ désigne la sous-algèbre engendrée par les éléments de degrés $\leq n$, alors*

$$\mathcal{M}(0) \subseteq \mathcal{M}(1) \subseteq \mathcal{M}(2) \ldots \subseteq \mathcal{M}(n) \subseteq \ldots$$

avec $\bigcup_{n\geq 0} \mathcal{M}(n) = \mathcal{M}$ et chaque $\mathcal{M}(n) \subseteq \mathcal{M}(n+1)$ est une extension de Hirsh.

Signalons d'autre part que la théorie d'obstruction permet de démontrer la correspondence biunivoque entre les extensions de Hirsh et les fibrations principales.

Soit alors X un CW-complexe simplement connexe et

$$\begin{tikzcd} & & X_n \\ & & \vdots \\ & \vdots & X_3 \arrow[d] \\ X \arrow[urr] \arrow[rr] \arrow[drr] & & X_2 \arrow[d] \\ & & \{pt\} \end{tikzcd}$$

sa tour de Postnikov. Notons par X'_n un modèle simplicial de X_n et

$$\begin{array}{ccc}
 & & X'_n \\
 & & \vdots \\
 & \vdots & X'_3 \\
 & \nearrow & \downarrow \\
X & \rightarrow & X'_2 \\
 & \searrow & \downarrow \\
 & & \{pt\}
\end{array}$$

un modèle simplicial de la tour précédente.

Théorème 1.2.13 *([GM, Th. 11.5]): Si $\mathcal{M}$ est un modèle minimal de X, alors,*

(i): $\mathcal{M}(n)$ est un modèle minimal de X'_n.

(ii): L'extension de Hirsh $\mathcal{M}(n) \subseteq \mathcal{M}(n+1)$ correspond à la fibration principale $X'_{n+1} \longrightarrow X'_n$.

(iii): $Q\mathcal{M}(n+1)$ (ensemble des indécomposables de $\mathcal{M}(n+1)$) est isomorphe en tant qu'espace vectoriel gradué avec $Hom_{\mathbb{Z}}(\pi_{n+1}(X), \mathbb{Q})$.

(iv): Le k-invariant $k^{n+2} \in H^{n+2}(X_n, \pi_{n+1}(X))$ est tel que

$$(k^{n+2})^{\vee} \otimes \mathbb{Q} = d : Q\mathcal{M}(n+1)) \longrightarrow H^{n+2}(\mathcal{M}(n)).$$

KS-extensions ($[FHT_1]et[GDW]$)

Dans ce qui suit nous rappelons la définition d'une KS- extension, ce qui nous permet détendre certaines définitions précédentes aux cas des fibrations.

Definition 1.2.14 Soient (A, d_A) et (B, d_B) deux adgc et $f : (A, d_A) \rightarrow (B, d_B)$ un morphisme d'adgc. f est dite une *KS-extension* si il existe $E \subseteq B$; $E = \{x_\alpha \in \mathcal{A}\}$; $\mathcal{A}$ étant un ensemble bien ordonné, tel que

(i): L'homomorphisme $\phi : (A \otimes \Lambda(E), d) \rightarrow (B, d)$ induit par $\Lambda(E) \overset{j}{\hookrightarrow} B$ et f est un isomorphisme.

(ii): $d_B\phi(1 \otimes x_\alpha) \in \phi(A \otimes \Lambda(E_\alpha))$; où $E_\alpha = \{x_\beta ; \beta < \alpha\}$ pour tout $\alpha \in \mathcal{A}$.

Remarque 1.2.15 $d_B\phi(a_\alpha \otimes 1) = d_B f(a) = f(d_A a) = \phi(d_A a \otimes 1)$, $\forall a \in A$. Ainsi nous pouvons identifier B et $A \otimes \Lambda(E)$ par ϕ. La différentielle d_B vérifie donc

(i): $d_B(a \otimes 1) = d_A a \otimes 1$; i. e. $d_{B|A} = d_A$

(ii): $d_B(x_\alpha) \in A \otimes \Lambda(E_\alpha)$, $\forall \alpha \in \mathcal{A}$.

Dans le cas des adgc (A, d_A) et (B, d_B) augmentées par ε_A et ε_B respectivement, posons $d(x_\alpha) = (\varepsilon_A \otimes id) \circ d_B(x_\alpha)$. Nous obtenons alors un homomorphisme d'adgc

$$\varepsilon_A \otimes id : (A \otimes \Lambda E, d) \longrightarrow (\Lambda E, \bar{d})$$

et dans ce cas $(\Lambda E, \bar{d})$ est un KS-complexe avec $\bar{d}$ la différentielle induite par celle de $A \otimes \Lambda E$ sur ΛE.

D'autre part nous pouvons supposer $\varepsilon_B(x_\alpha) = 0$, $\forall \alpha \in \mathcal{A}$ en effectuant le changement suivant $x_\alpha \to x_\alpha - \varepsilon_B(x_\alpha)$. Dans ce cas, si l'augmentation $\varepsilon : \Lambda(E) \to \mathbb{K}$ est définie par $\varepsilon(x_\alpha) = 0$, $\forall \alpha \in \mathcal{A}$, alors ϕ et $\varepsilon_A \otimes id$ préservent les augmentations. L'extension entre adgc augmentées est alors notée

$$(A, d_A) \to (A \otimes \Lambda(E), d) \to (\Lambda(E), \bar{d}).$$

Elle est dite *minimale* si $(\Lambda(E), \bar{d})$ est un KS-complexe minimal.

Si (A, d_A) est aussi un KS-complexe, l'extension est dite une Λ-extension.

Théorème 1.2.16 *Etant donné une Λ-extension,*

$$(A, d_A) \to (A \otimes \Lambda(E), d) \to (\Lambda(E), \bar{d})$$

d'adgc augmentées, la suite de complexes de cochaînes des indécomposables est exacte; i.e:

$$0 \to (\mathcal{Q}(A), d_A) \to (\mathcal{Q}(B), d_B) \to (\mathcal{Q}(\Lambda E), \bar{d_B}) \to 0$$

Soit X un espace topologique connexe par arcs et $\mathcal{M}(X)$ son modèle minimal. Le n^{eme} groupe *pseudo-dual* d'homotopie rationnelle de X est par définition $\pi^n_\psi(X) = \pi^n(\mathcal{M}(X))$. Ce groupe dépend fonctoriellement de X quoique $\mathcal{M}(X)$ n'est pas fonctoriel. D'autre part si X est simplement connexe,

$$\pi^n_\psi(X) \cong Hom_{\mathbb{Z}}(\pi_n(X), \mathbb{K}).$$

Definition 1.2.17 Soit X un espace topologique connexe par arcs
(i) X est dit *c-fini* si $dimH^*(X, \mathbb{K}) < \infty$ et sa caractéristique d'Euler-Poincarré est

$$\chi(X) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n dimH^n(X, \mathbb{K}).$$

(ii) X est dit *π-fini* si $dim_{\mathbb{K}}(\pi_\psi^n(X)) < \infty$ et sa caractéristique d'Euler homotopique est

$$\chi_\pi(X) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n dim\pi_\psi^n(X).$$

Definition 1.2.18 Une algèbre A sur un anneau principal R est une *algèbre à dualité de Poincaré* s'il existe un élément $\omega \in A$ tel que $A = \omega\mathrm{R}$ (ω est appelée classe fondamentale de A), $A^n = 0 \quad \forall i > n$ et le produit dans A induit une forme biliniaire non dégénérée:

$$< -, - > : \ A^i \otimes A^{n-i} \to \mathrm{R} \quad \text{avec } x.y =< x, y > \omega.$$

Un espace X satisfait la dualité de Poincarré si l'algèbre $H^*(X, \mathrm{R})$ est à dualité de Poincarré et sa *dimension formelle* notée $fd(X)$ est par définition le maximum des entiers m tel que $H^m(X, \mathrm{R}) \neq 0$.

Théorème 1.2.19 (GDW, Th. 2.4.3-2.4.5) *(i): Supposons que $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ et X est c-fini et π-fini, alors X satisfait la dualité de Poincarré. Si en plus $\{x_1, \ldots, x_r\}$ est une base de $\pi_\psi^{pair}(X)$ et $\{y_1, \ldots, y_s\}$ en est une de $\pi_\psi^{impair}(X)$, alors sa dimension formelle, est donnée par*

$$fd(X) = r + \sum_{i+1}^{s}|y_i| - \sum_{i+1}^{r}|x_i|.$$

(ii): $\chi_\pi(X) \leq 0$ et $\chi(X) \geq 0$.

(iii): $\chi(X) > 0$ si et seulement si $\chi_\pi(X) = 0$ et dans ce cas $\mathcal{M}(X)$ est de la forme

$$\mathbb{Q}[x_1, \ldots, x_n] \otimes \Lambda(y_1, \ldots, y_n)$$

avec $dx_i = 0, \quad dy_i = f_i \in \mathbb{Q}[x_1, \ldots, x_n]$, $(1 \leq i \leq n)$ et

$$H^*(X, \mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}[x_1, \ldots, x_n]/(f_1, \ldots, f_n)$$

en tant qu'agc. En plus

$$\chi(X) = \prod_{i=1}^{n}(|x_i| + 1)/\prod_{i=1}^{n}(|y_i|).$$

1.2.3 Modèle d'une fibration ([FHT_1]et[CDW])

Soit

$$F \xrightarrow{i} E \xrightarrow{\pi} B$$

une fibration de Serre d'espaces connexes par arcs. Il est important de pouvoir déduire le modèle minimal de E à partir de ceux de la fibre F et de la base B.

Théorème 1.2.20 *supposons que*

(i) B est simplement connexe,

(ii) B ou F est de type fini.

Alors il existe un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} A_{PL}(B) & \xrightarrow{A(\pi)} & A_{PL}(E) & \xrightarrow{A(i)} & A_{PL}(F) \\ \uparrow id & & \uparrow \beta_1 & & \uparrow \gamma_1 \\ A_{PL}(B) & \hookrightarrow & A_{PL}(B)\otimes \mathcal{M}(F) & \xrightarrow{p} & \mathcal{M}(F) \\ \uparrow \alpha & & \uparrow \beta_2 & & \uparrow \gamma_2 \\ \mathcal{M}(B) & \hookrightarrow & \mathcal{M}(B)\otimes \mathcal{M}(F) & \xrightarrow{p} & \mathcal{M}(F) \end{array}$$

où la KS-extension de milieu (resp. en bas) est minimale (resp. une Λ-extension Λ-minimale) et toutes les applications verticales sont des quasi-isomorphismes. En particulier

$-\beta_1 \circ \beta_2$ est un modèle de E.

$-\alpha$ et $\gamma_1 \circ \gamma_2$ sont ceux de B et F respectivement.

Compte tenue du théorème 1.2.16, nous avons:

Corollaire 1.2.21 *Si deux des trois espaces F, E ou B est π-fini, alors le troisième l'est aussi et*

$$\chi_\pi(E) = \chi_\pi(B) + \chi_\pi(F).$$

1.2.4 Modèle bigradué et modèle filtré ([HS])

Les modèles bigradué et filtré sont introduits par S. Halperin et J. Stasheff dans le cas des adg commutatives et ce dans le but d'etudier la réalisabilité des équivalences d'homotopies entre espaces rationnels.

Théorème 1.2.22 (H_1S, **Prop. 3.4**) *soit H une ag commutative connexe. Alors il existe une adgc $(\Lambda Z, d)$ et un quasi-isomorphisme $\rho : (\Lambda Z, d) \longrightarrow (H, 0)$ tel que:*

(i): $Z = \bigoplus_{m \geq 0} \bigoplus_{n \geq 1} Z_m^n$ *et* $\rho(\bigoplus_{m \geq 1} Z_m^*) = 0$

(ii): d est de bas degré -1.

(iii): $\rho^*_{|H_0^*(\Lambda Z,d)} : H_0^*(\Lambda Z, d) \longrightarrow H$ *est un isomorphisme.*

(iv): $H_+^*(\Lambda Z, d) = 0$.

En plus si $\alpha : (\mathcal{M}, \delta) \longrightarrow (H, 0)$ est un autre modèle minimal tel que $\mathcal{M} = \bigoplus_{m \geq 0} \bigoplus_{n \geq 1} \mathcal{M}_m^n$ est une algèbre bigraduée, $\alpha(\bigoplus_{m \geq 1} \mathcal{M}_m^*) = 0$ et α et δ vérifient les propriétés (ii)-(iv), alors il existe un isomorphisme $\phi : (\Lambda Z, d) \longrightarrow (\mathcal{M}, \delta)$ de bidegré $(0, 0)$ let que $\alpha \circ \phi = \rho$.

Comme conséquence à ce théorème, notons que $(\Lambda Z, d)$ est une adg commutative minimal et que $H \cong \Lambda Z_0 / dZ_1.\Lambda Z$.

Definition 1.2.23 Le quasi-isomorphisme $\rho : (\Lambda Z, d) \longrightarrow (H, 0)$ ou tout simplement $(\Lambda Z, d)$ est appelé *modèle bigradué* de H.

Une adgc (A, d) est dite *formel* si le modèle bigradué de $H(A, d)$ est aussi un modèle minimal de (A, d).

Un espace X connexe par arcs est dit *formel* si l'adgc $A_{PL}(X)$ est formel

Exemple 1.2.24 (i): soit G un groupe de Lie compact connexe et K un sous-groupe fermé connexe de même rang que G, alors G/K est formel.

(ii): Toute variété kalherienne est formel.

(iii): Soit X un espace c-fini et π-fini. Si en plus $\chi(X) > 0$, d'après le théorème 1.2.19 X est un espace formel.

Soient maintenant (A, d) une adgc et $(\Lambda Z, d)$ un modèle bigradué de $H(A, d)$ dans [H-S] S. Halperin et J. Stasheff définissent aussi un modèle de (A, d) (unique à isomorphisme près) à partir de $(\Lambda Z, d)$ moyennant la filtration de $(\Lambda Z, d)$ définie par:

$$\mathcal{F}_n(\Lambda Z, d) = \bigoplus_{m=0}^{n} (\Lambda Z)_m; \ \forall n \geq 0.$$

Théorème 1.2.25 (HS, *Prop.4.4*) *Soit (A,d) une adgc de modèle bigradué $\rho : (\Lambda Z, d) \longrightarrow (H(A,d),0)$. Alors il existe une différentielle D sur ΛZ telle que $(\Lambda Z, D)$ est un KS-complexe et un quasi-isomorphisme $\pi : (\Lambda Z, D) \xrightarrow{\simeq} (A,d)$ tel que*

1. *Pour tout $x \in Z_n^\bullet$, $D(x) - d(x) \in \mathcal{F}_{n-2}(\Lambda Z, d)$*
2. *$\forall y \in (\Lambda Z)_0$, $[\pi(y)] = \rho(y)$ dans $H(A,d)$.*

Definition 1.2.26 $(\Lambda Z, D)$ est appelé *modèle filtré* de (A,d). IL n'est pas minimal en généarl et quand il en est ainsi, nous dirons que (A,d) est *faiblement formel.*

1.2.5 Modèle de Quillen et Modèle d'Anick

Modèle de Quillen ($[FHT_1]$, $[Q]$)

Soient (C,d) une cdg coaugmentée cocommutative sur le corps $I\!\!K$ et $(\Omega C, d)$ sa cobar construction. La différentielle $d = d_0 + d_1$ vérifie, $d_0 : s^{-1}\bar{C} \to s^{-1}\bar{C}$ et $d_1 : s^{-1}\bar{C} \to s^{-1}\bar{C} \otimes s^{-1}\bar{C}$. Soit d'autre part $c \in C$. Si $\bar{\Delta}c = \sum_i a_i \otimes b_i$, alors $\bar{\Delta}c = \sum_i (-1)^{|a_i||b_i|} b_i \otimes a_i$. D'où

$$\begin{aligned} d_1 s^{-1} c &= \tfrac{1}{2} \textstyle\sum_i (-1)^{|a_i|} (s^{-1}a_i \otimes s^{-1}b_i - (-1)^{|s^{-1}a_i||s^{-1}b_i|} s^{-1}b_i \otimes s^{-1}a_i) \\ &= \tfrac{1}{2} \textstyle\sum_i (-1)^{|a_i|} s^{-1}[s^{-1}a_i, s^{-1}b_i]. \end{aligned}$$

Ceci montre que $d_1 : s^{-1}C \longrightarrow I\!\!L(s^{-1}\bar{C}) \subseteq T(s^{-1}\bar{C})$ et il en résulte que $(I\!\!L(s^{-1}\bar{C}), d)$ est une aldg. En plus nous avons

$$U I\!\!L(s^{-1}\bar{C}) = \Omega C$$

Definition 1.2.27 $(I\!\!L(s^{-1}\bar{C}), d)$ s'appelle *construction de Quillen* associée à (C,d) et est notée $\mathcal{L}(C,d)$.

Théorème 1.2.28 *([FHT_1, Th. 21.9]): Supposons que (L,∂) est une aldg et (C,d) est une cdg cocommutative et coaugmantée. Alors il existe deux quasi-isomorphismes naturels*

$$\begin{aligned} \varphi &: (C,d) \xrightarrow{\simeq} C_*\mathcal{L}(C,d) \\ \psi &: \mathcal{L}C_*(L,\partial) \xrightarrow{\simeq} (L,\partial) \end{aligned}$$

Ce théorème assûre l'unicité à isomorphismes près et nous avons:

Definition 1.2.29 Un *modèle de Quillen* d'un espace X est une construction de Quillen de la cdg $C_*(X; \mathbb{K})$.

Théorème 1.2.30 *Si $(\mathbb{L}(V), d)$ désigne le modèle de Quillen d'un espace rationnel X simplement connexe, alors*
(i): $V \cong s^{-1}H_*(X,\mathbb{Q})$ (ii): $H(\mathbb{L}(V), d) \cong \pi_*(\Omega X) \otimes \mathbb{Q}$.

Comme consequence au théorème de Milnor-Moore, nous avons l'isomorphisme

$$H_*(\Omega X, \mathbb{Q}) \cong (UH\mathbb{L}(V), d).$$

Modèle d'Anick ([An])

En guise de généralisation des théories de Sullivan et de Quillen aux adgc sur un anneau principal R de caractéristique quelquonque, D. Anick associe à tout CW-complexe X vérifiant certaines conditions de finitude imposées par la carctéristique de R, une aldg (L, ∂).

Notons $\rho(\mathrm{R})$ le plus petit entier premier (ou ∞) non inversible de R et considérons la sous catégorie $CW_r(\mathrm{R})$ composées des CW-copmlexes r-connexes ($r \geq 1$) tels que $dim(X) \leq r\rho(\mathrm{R})$.

Théorème 1.2.31 *Soit $X \in CW_r(\mathrm{R})$. Alors il existe une équivalence d'adg*

$$UL \xrightarrow{\simeq} C_*(\Omega X; \mathrm{R})$$

où $L = \oplus_{i \geq 1} L_i$ est une aldg telle que chaque L_i est R-libre de type fini et $C_*(\Omega X; \mathrm{R})$ est munie de produit $\Delta : \Omega X \otimes \Omega X \longrightarrow \Omega X$. En plus cette équivalence prèserve les diagonales à homotopie près et L est unique à une classe d'homotopie près des isomorphismes d'aldg.

Pour aboutir au modèle d'Anick susmentionné, nous combinons les équivalences entre cdg suivantes :

$$C_*(L) \xrightarrow{\simeq} B(UL) \xrightarrow{\simeq} B(C_*(\Omega X; \mathrm{R})) \xleftarrow{\simeq} B(\Omega C_*(X; \mathrm{R})) \xleftarrow{\simeq} C_*(X; \mathrm{R}).$$

En dualisant nous avons:

$$C^*(L) \xrightarrow{\simeq} B(C_*(\Omega X; \mathrm{R}))^\vee \xleftarrow{\simeq} C^*(X; \mathrm{R}).$$

qui est une suite d'équivalences d'adg. En en déduit que $C^*(L)$ est une adg commutative équivalente à $C^*(X; \mathrm{R})$.

Enfin pour introduire la notion du modèle minimal comme dans le cas rationnel, nous utilisant le résultat suivant dû à S. Halperin. .

Théorème 1.2.32 (H_1, **Th. 7.1**) *: Soit (A,d) une adg commutative dont l'homologie $H(A,d)$ vérifie, $H(A,d) = \{H^i(A,d)\}_{i\geq 0}$ est de type finie, $H^0(A,d) = \mathrm{R}$, $H^1(A,d) = 0$ et $H^2(A,d)$ est R-libre. Alors il existe un quasi-isomorphisme d'adgc*

$$(\Lambda W, d) \xrightarrow{\simeq} (A,d)$$

tel que

1. *$W = \{W^i\}_{i\geq 2}$ et chaque W^i est R-libre sur une base finie.*
2. *Pour tout $i \geq 2$, il existe un entier $r_i \in \mathrm{R}$ non inversible tel que*

$$d_1 : W^i \longrightarrow r_i W^{i+1}.$$

Definition 1.2.33 L'adgc $(\Lambda W, d)$ est appelé *modèle minimal* de (A,d).

Rappelons d'autre part que $C^*(L) = (\Lambda V, d)$; où $V = (sL)^\vee$ et $d = d_0 + d_1$ avec $d_0 : V \to V$ et $d_1 : V \to \Lambda^2 V$. par suite $C^1(L) = V^1 = 0$ et donc $H^2(C^*(L)) = Ker(d : C^2(L) \longrightarrow C^3(L))$ est R-libre. Ainsi pour une telle algèbre nous associons un modèle minimal qui sera noté $(\Lambda W, d)$.

Remarque 1.2.34 (i): Dans le cas où R est un corps, la condition (2) du théorème précédent est équivalente à $d_1 = 0$; i.e. d est décomposable et nous retrouvons alors la condition de minimalité de Sullivan.

(ii) Contrairement au modèle du Sullivan, le modèle minimal $(\Lambda W, d)$ vérifi le lemme de relèvement seulement lorsque dans le diagramme suivant, le quasi-isomorphisme η

$$\begin{array}{ccc} & & (A,d) \\ & & \simeq\downarrow \eta \\ (\Lambda W, d) & \xrightarrow{\psi} & (A,d) \end{array}$$

est surjectif. Cependant pour un diagramme d'adgc

$$\begin{array}{ccc} (\Lambda W', d') & \xrightarrow{m'} & (A', d') \\ & & \simeq\downarrow \phi \\ (\Lambda W, d) & \xrightarrow{m} & (A,d) \end{array}$$

où (A',d') et (A,d) vérifient les conditions du théorème précédent et sous certaines conditions d'"*admissibilité*", il existe un morphisme $\phi' : (\Lambda W', d') \to (\Lambda W, d)$ tel que $H(\phi)H(m') = H(m)H(\phi')$.

Quand nous considérons X dans la catégorie $CW_r(\mathrm{R})$, le critère d'admissibilité susmensionné est vérifié pour $C^*(X,\mathrm{R})$ et il en résulte un modèle minimal $(\Lambda W,d)$ unique à homotopie près de l'adgc $C^*(L)$ équivalente à $C^*(X,\mathrm{R})$.

D'autre part tout morphisme $\phi : (\Lambda W',d') \to (\Lambda W,d)$ entre deux modèles minimaux de l'espace X induit un morphisme $\phi_1 : (\Lambda W',d'_1) \to (\Lambda W,d_1)$ (d_1 étant suivant les notation précédentes, la partie quadratique de d) défini par $\phi_1 : W' \to W$ avec $\phi - \phi_1 : W' \to \Lambda^{\geq 2}W$. Le morphisme $(s\phi_1)^\vee : E' = (sW')^\vee \to E = (sW)^\vee$ est un morphisme d'algèbres de Lie. En particulier si ϕ est un isomorphisme, $(s\phi_1)^\vee$ l'est aussi et permet alors d'identifier E et E'. L'unique algèbre de Lie E telle que $C^*(E) = (\Lambda W,d_1)$ est appelée l'*algèbre de Lie d'homotopie* de $(\Lambda W,d)$.

Une conséquence majeure de ce résultat de S. Halperin est l'extension du résultat de Milnor-Moore au cas non rationnel.

Théorème 1.2.35 $(H_1, Th.10.1)$ *Soit $(\Lambda W,d)$ un modèle de $X \in CW_r(\mathrm{R})$. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

(1)$H_*(\Omega X;\mathrm{R})$ est de torsion libre.

(2)La différentelle d de $(\Lambda W,d)$ est décomposable.

Dans ce cas l'algèbre d'homotopie de Lie E associé à $(\Lambda W,d)$ dépend fonctoriellement de X et il existe une équivalence d'ahg

$$UE \xrightarrow{\simeq} H_*(\Omega X;\mathrm{R}).$$

1.3 Bibliographie

[Ad] J. F. Adams, *On the cobar construction*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA 42 (1956), 409-412.

[An] D. Anick, *Hopf algebras up to homotopy* , J. Amer. Math. Soc. 2 (1989) 417-453.

[DGMS] P. Deligne, P. Griffiths, J. Morgan and D. sullivan, *The real homotopy theory of kähler manifolds*, Invent. math. 29 (1975), 245-254.

[El] M. El Haouari, *p-formalité des espaces*, Journal Pure. Appl. Algebra 78 (1992), 27-47.

[F] Y. Félix, *La dichotomie elliptique-hyperbolique en homotopie rationnelle*, Astérisque 176, (1989).

[FH] Y. Félix and S. Halperin, *Rational L-S category and its applications*, Trans. Amer. Math. Soc, 273 (1982),1-73.

[FHT_1] Y. Félix, S. Halperin and J. C. Thomas, *Rational Homotopy Theory*, Preprint Université d'Angers (1997).

[FHT_2] Y. Félix, S. Halperin and J. C. Thomas, *Gorenstein spaces*,Adv in Maths 71 (1988) 92-112.

[FHT_3] Y. Félix, S. Halperin and J. C. Thomas, *Elliptic Hopf algebras*, J. London. Math. Soc. (2) 43 (1991) 545-555.

[FHJLT] Y. Félix, S. Halperin, C. Jacobson, C. Löfwall and J. C. Thomas, *The radical of the homotopy Lie algebra*, Amer. J. Math. 110. (1988), 301-322.

[GM] P. A. Griffiths and J. W. Morgan, *Rational Homotopy theory and Differential Forms* Birkhäuser, 1981.

[H_1] S. Halperin, *Finiteness in the minimal models of Sullivan*, Trans. Amer. Math. Soc. 230 (1977), 173-199.

[H_2] S. Halperin, *Universal enveloping algebras and loop space homology*, J. Pure Appl. Algebra 83 (1992) 237-282.

[H_3] S. Halperin, *Lectures on Minimal Models*, Mém. Soc. Math. France (N.S.) No. 9/10 (1983).

[HL] S. Halperin. and J. M. Lemaire, *Notion of category in differential algebra*, In *Algebraic Topology - Rationnal Homotopy*, Lecture Notes in Mathematics, 1318 (1988), 138-154.

[HS] S. Halperin and J. sthsheff, *Obstruction to Homotopy Equivalences*, Advanced In Math. 32, (1979) 233-279.

[M] J. McCleary, *User's Guide To Spectral Sequences*, Publish or Perish, Qnc. MLS 12, 1985.

[MM] J W. Milnor and J C. Moore, *On the structure of Hopf Algebras*, Ann. Math. 81 (1955) 211-264.

[Q] D. G. Quillen, *Rational Homotopy Theory*, Ann. Math. 90, (1969), 205-295.

[S] D. Sullivan, *Infinitesimal computations in topology*, Inst. Hautes. Études Sci. Publ. Math. 47 (1978), 269-331.

[T] J-C. Thomas, *Homologie des espaces de lacets, problèmes et questions* Journal Pure. Appl. Algebra 91 (1994) 355-379.

Chapitre 2. Dimension globale et classe fondamentale d'un espace[1]

2.1 Introduction

Dans ce chapitre S désigne un espace simplement connexe pointé, ΩS son espace de lacets et $\mathbb{K}$ un corps de caractéristique $\neq 2$. Le degré d'un élément x homogène dans un objet gradué sera noté $|x|$.

L'homologie $H_*(\Omega S; \mathbb{K})$, munie de sa structure multiplicative est une algèbre (de Hopf) dite de Pontryagin. Notre étude sur cette algèbre repose sur les deux invariants numériques suivants:

$$prof(H_*(\Omega S; \mathbb{K})) = inf\{k / Ext^{k,*}_{H_*(\Omega S;\mathbb{K})}(\mathbb{K}; H_*(\Omega S; \mathbb{K})) \neq 0\},$$
$$gldim(H_*(\Omega S; \mathbb{K})) = sup\{k / Ext^{k,*}_{H_*(\Omega S;\mathbb{K})}(\mathbb{K}; \mathbb{K}) \neq 0\}$$

qui sont reliés à la catégorie de Lusternik-Schnirelman de l'espace S (dont la définition est rappelée au §1) par les relations suivantes ([5]. Th. A et Th. A'[)]:

$$prof(H_*(\Omega S; \mathbb{K})) \leq cat(S),$$

$$prof(H_*(\Omega S; \mathbb{K})) = cat(S) \Rightarrow prof(H_*(\Omega S; \mathbb{K})) = gldim(H_*(\Omega S; \mathbb{K})).$$

Lorsque S est $\mathbb{K}$-elliptique et $gldim(H_*(\Omega S; \mathbb{K})) < \infty$, l'algèbre de Pontryagin $H_*(\Omega S; \mathbb{K})$ est isomorphe en tant qu'espace vectoriel à une algèbre de polynômes. Ce résultat est une conséquence du théorème B de [12], qui étend au cas des algèbres de Hopf graduées le théorème de Auslander-Buchsbaum-Serre:

Théorème 2.1.1 $[21, Th.9, \S IV]$: *Soit A un anneau local, alors, $gldim(A) < \infty$ si et seulement si A est régulier.*

Dans ce chapitre nous donnons plusieurs caractérisations des espaces $\mathbb{K}$-elliptiques tels que $gldim(H_*(\Omega S; \mathbb{K})) < \infty$. Rappelons qu'un espace r-connexe ($r \geq 1$) est $\mathbb{K}$-elliptique si:

1) $dim H^i(S; \mathbb{K}) < \infty$ pour tout $i \geq 0$,

2) $cat(S) < \infty$,

3) Il existe un entier k et une constante C tels que $dim H_r(\Omega S; \mathbb{K}) \leq C r^k$, $r \geq 1$.

[1] Ce travail est l'objet de notre article publié aux Ann. Inst. Fourier n: 49 fasc. 1 (1999).

(ii): X est $\mathbb{K}$-elliptique et $2 \leq prof(H_*(\Omega X;\mathbb{K}))$.
Alors $H_*(\Omega X;\mathbb{K})$ ne contient aucun élément inert.

Remarque: D'après [24 (2), Prop. 7.6], si F désigne la fibre homotopique de l'application $S \longrightarrow S \cup_f e^{n+1}$; $prof(H_*(\Omega F;\mathbb{K})) < \infty$ entraîne que f est paresseux. Nous déduisons alors que si en plus de l'une ou l'autre des hypothèses des deux théorèmes précédents, $prof(H_*(\Omega F;\mathbb{K})) < \infty$, alors $H_*(\Omega S;\mathbb{K})$ a tous ces éléments paresseux mais non inerts.

2.2 Rappels

Dans ce § nous rappelons les définitions des invariants numériques qui nous serons utiles dans toute la suite de chapitre. Nous notons par (A,d) une algèbre différentielle graduée, (M,d) un (A,d)-module et $A^{\#}$ l'algèbre graduée sous-jacente de A.

(i): Une adg (A,d) augmentée par $A \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{K}$ est dite de *Gorenstein* si $dim\ \mathcal{E}xt_A(\mathbb{K},A) = 1$. Un espace est de Gorenstein si un modèle minimal de cet espace est de Gorenstein.

(ii): Soit (A,d) une adg augmentée par $A \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{K}$, l'application *d'évaluation* de A est l'application $\mathbb{K}$-linéaire naturelle:

$$ev_A : \mathcal{E}xt_A(\mathbb{K},A) \longrightarrow H^*(A),$$

définie par: Si $\alpha = [f] \in \mathcal{E}xt_A(\mathbb{K},A)$ est représentée par le cocycle $f : P \longrightarrow A$ ($P \xrightarrow{\simeq} \mathbb{K}$ résolution semi-libre de $\mathbb{K}$), alors, $ev_A(\alpha) = [f(p)]$, p étant un cocycle représentant 1 dans $\mathbb{K}$. C'est un invariant homotopique étroitement lié à la structure de A

Théorème 2.2.1 *[8, Pro. 3.4] et [19, Th. A]: Soit A une ADG de la forme $(\Lambda V,d)$ avec d décomposable et V de dimension finie, alors,*
(i) A est de Gorenstein.
(ii) $ev_A \neq 0$ si et seulement si $H^*(A,d)$ est de dimension finie.

(iii): La catégorie de Lusternik-Schnirelmann de S, notée $cat(S)$, est par définition le plus petit entier n tel que S peut être recouvert par $n+1$ ouverts contractiles dans S.

(iv): L'invariant de Toomer de S est défini comme suit ([3, §1.4]):

$$e_{\mathbb{K}}(S) = sup\{e(\alpha), \alpha \in H^*(S;\mathbb{K})\},$$

où chaque entier $e(\alpha)$ est défini de la manière suivante. Notons $(\Omega S)^{*n}$ le joint itéré n-fois, $G_n S$ l'espace des orbites de $(\Omega S)^{*n}$ sous l'action naturelle de ΩS et $\varphi_n : G_n S \longrightarrow G_\infty S = B\Omega S$ l'application canonique intervenant dans la définition du classifiant du monoïde ΩS. Nous posons:

$$e(\alpha) \leq n \quad si \quad H^*(\varphi_n)(\alpha) \neq 0.$$

Ces deux invariants numériques vérifient (pour tout corps $I\!K$) l'inégalité ([23, Th. I B2] et [3, Prop. 1.4]):

$$e_{I\!K}(S) \leq cat(S).$$

(v): Soit maintenant $(\Lambda V, d)$ une algèbre de Sullivan minimale. Notons $\Lambda V \otimes \Lambda W \longrightarrow \Lambda V/\Lambda^{>m} V$ le modèle relatif ([11, §14]) de la projection $(\Lambda V, d) \longrightarrow (\Lambda V/\Lambda^{>m} V, \overline{d})$ et j l'inclusion: $\Lambda V \hookrightarrow \Lambda V \otimes \Lambda W$. Par définition ([13] et [17]) $cat(\Lambda V, d)$ est le plus petit entier m tel que j admette une rétraction r d'adgc (i.e: $r \circ j = id$). Si r est seulement un morphisme de $I\!K$-modules, l'entier m est noté $e_c(\Lambda V, d)$.

2.3 Preuve des propositions A et B.

Dans ce paragraphe, $(\Lambda V, d)$ désigne une adgc 1-connexe avec d décomposable. Nous notons par L son algèbre de Lie d'homotopie. Dans le cas topologique, si S désigne un espace r-connexe ($r \geq 1$) vérifiant la condition (ξ), son algèbre de Lie d'homotopie est notée par E.

Proposition 2.3.1 *Soit $I\!K$ un corps de caractéristique non nulle et S un espace r-connexe, dans le domaine d'Anick, alors, S est $I\!K$-elliptique si et seulement si $dim(E) < \infty$.*

Preuve: Signalons tout d'abord que puisque $\varrho(I\!K) < \infty$, la condition (ξ) entraîne que $H^*(S; I\!K)$ est de type fini et que $cat(S) < \infty$ ([18, Prop. 5.1]) et par suite ([5, Th. A]) $prof(H_*(\Omega S; I\!K)) < \infty$. D'autre part ([9, Ex. 1.3]) $UE \cong H_*(\Omega S; I\!K)$ est elliptique si et seulement si $dim(E) < \infty$. Nous concluons alors en utilisant [9, Th. C]. $\diamond$

Avant d'aborder la démonstration du la proposition B, nous établissons dans ce qui suit une condition de finitude de la dimension globale de $H_*(\Omega S; I\!K)$.

Proposition 2.3.2 *Si L est de dimension finie, alors:*

$$gldim(UL) < \infty \Longleftrightarrow ev_{(\Lambda V, d_2)} \neq 0.$$

Preuve: Par définition de L, $(\Lambda V, d_2) = C^*(L)$ et $Ext^{*,*}_{UL}(I\!K, I\!K) \simeq H^{*,*}(C^*(L))$. La condition $gldim(UL) < \infty$ est équivalente à la condition $dimH(\Lambda V, d_2) < \infty$. Or $dim(V) = dim(sL) < \infty$. La proposition résulte donc du théorème 2.2.1. $\diamond$

En appliquant cette proposition au modèle minimal de l'espace S nous obtenons:

$$gldim(H_*(\Omega S; I\!K)) < \infty \Longleftrightarrow ev_{(\Lambda V, d_2)} \neq 0.$$

Proposition 2.3.3 *Si $H^*(S; I\!K)$ est une algèbre à dualité de Poincaré, alors:*

$$gldim(H_*(\Omega S; I\!K)) < \infty \Longleftrightarrow e_{I\!K}(S) = prof(H_*(\Omega S; I\!K)).$$

Preuve: Puisque $H^*(S; I\!K)$ est à dualité de Poincaré, S est de Gorenstein ([8, Th. 3.1]) et par suite $gldim(H_*(\Omega S; I\!K)) < \infty$ entraîne ([12, Section 3] et [5, Th. A']) $prof(H_*(\Omega S; I\!K)) = Mcat(S; I\!K) = gldim(H_*(\Omega S; I\!K))$. Or d'après ([6, Th. 3]) $e_{I\!K}(S) = Mcat(S; I\!K)$ et donc $prof(H_*(\Omega S; I\!K)) = e_{I\!K}(S)$. Pour la réciproque nous utilisons de nouveau l'égalité $e_{I\!K}(S) = Mcat(S; I\!K)$ qui entraîne que $prof(H_*(\Omega S; I\!K)) = gldim(H_*(\Omega S; I\!K))$. $\diamond$

Remarque 2.3.4 La première implication de la proposition précédente reste valable si nous supposons seulement que S est de Gorenstein. En effet dans ce cas, $gldim(H_*(\Omega S; I\!K)) < \infty$ entraîne que $Mcat(S; I\!K) < \infty$ et par suite $H^*(S; I\!K)$ est une algèbre à dualité de Poincaré.

2.4 Preuve du théorème C.

Nous adoptons les mêmes notations qu'au § précédent. Démontrons tout d'abord:

Lemme 2.4.1 *Si $dim(V) < \infty$ et $dimH(\Lambda V, d) < \infty$, alors, $H(\Lambda V, d)$ est à dualité de Poincaré.*

Preuve: D'après le théorème 2.2.1, $(\Lambda V, d)$ est de Gorenstein. Puisque $dimH(\Lambda V, d) < \infty$ et $V = V^{\geq 1}$, il existe un idéal différentiel I et un quasi-isomorphisme de $I\!K$-modules semi-libres $\phi : \Lambda V \xrightarrow{\simeq} \Lambda V/I$. Il s'ensuit ([11, Prop. 6.7]) que $Hom(\phi; I\!K)$ est aussi un quasi-isomorphisme et par suite $([\Lambda V/I]^\vee)^{<-n} = 0$ (où n est tel que $H^{>n}(\Lambda V, d) = (\Lambda V/I)^{>n} = 0$). Il résulte alors de ([8, Lemme A.3]) une $(\Lambda V, d)$-résolution semi-libre de $[(\Lambda V, d)]^\vee$ qui peut être choisie minimale. Nous terminons alors comme dans [8, Th. 3.6]. $\diamond$

Remarque 2.4.2 Si $I\!K$ est de caractéristique non nulle et S est $I\!K$-elliptique, en utilisant la proposition A, nous déduisons du lemme précédent que $H^*(S; I\!K)$ est à dualité de Poincaré.

La démonstration du lemme suivant repose sur les deux suites spectrales de Milnor-Moore suivantes: ((**) a été introduite par A. Murillo [19]):

$$(*) \quad E_2^{p,-q} = H^{p,-q}(\Lambda V, d_2) \Longrightarrow H^{p-q}(\Lambda V, d),$$

$$(**) \quad \mathcal{E}_2^{p,-q} = \mathcal{E}xt^{p,-q}_{(\Lambda V,d_2)}(I\!K, (\Lambda V, d_2)) \Longrightarrow \mathcal{E}xt^{p-q}_{(\Lambda V,d)}(I\!K, (\Lambda V, d))$$

qui sont définies respectivement à l'aide des filtrations : $F^p = (\Lambda^{\geq p}V)$ et $\mathcal{F}^p = \{f \in Hom_{\Lambda V}(\Lambda V \otimes \Gamma(sV), \Lambda V)/f(\Gamma sV) \subseteq \Lambda^{\geq p}V\}$. Nous vérifions alors que l'application

$$ev : (Hom_{(\Lambda V,d)}[(\Lambda V \otimes \Gamma(sV), D), (\Lambda V, d)], \mathcal{D}) \longrightarrow (\Lambda V, d)$$

définie par $ev(f) = f(1)$ préserve les filtrations. D'où le morphisme de suites spectrales, noté $(E_r(ev))_{2\leq r\leq\infty}$ tel que $E_2(ev) = ev_{(\Lambda V,d_2)}$. D'après le thórème classique de convergence des suites spectrales, ce morphisme est compatible avec l'application $ev_{(\Lambda V,d)}$.

Notons $\beta_1 : \mathcal{E}_\infty^{p,-q} \to \mathcal{E}_0^{p,-q}(H(\mathcal{A}))$ et $\beta_2 : E_\infty^{p,-q} \to E_0^{p,-q}(H(\Lambda V, d))$ les isomorphismes induits par la convergence des suites spectrales; où $\mathcal{E}_0^{p,-q}(H(\mathcal{A}))$ et $E_0^{p,-q}(H(\Lambda V, d))$ désignent les gradués associés de $\mathcal{A} = \mathcal{E}xt_{(\Lambda V,d)}(I\!K, (\Lambda V, d))$ et $(\Lambda V, d)$.

Lemme 2.4.3 *Soit $(\Lambda V, d)$ une adgc 1-connexe telle que d soit décomposable, $dim(V) < \infty$ et $dim H(\Lambda V, d) < \infty$, alors, les propriétés suivantes sont équivalentes:*

(i) $ev_{(\Lambda V,d_2)} \neq 0$,

(ii) $E_\infty(ev) \neq 0$,

(iii) $E_\infty(ev) = \beta_2^{-1} ev_{(\Lambda V,d)} \beta_1$.

Preuve: (iii) implique (ii) d'après le Théorème 2.2.1. (ii) implique (i) provient de la convergence des suites spectrales. Supposons maintenant que $ev_{(\Lambda V,d_2)} \neq 0$; ce qui équivaut à $dim H(\Lambda V, d_2) < \infty$. Le lemme précédent entraine donc que $H(\Lambda V, d_2)$ et $H(\Lambda V, d)$ sont à dualité de Poincaré de dimensions formelles respectives m et n. D'autre part nous avons le diagramme suivant:

$$\begin{array}{lclcl}
\mathcal{E}_2^{p,-q} = \mathcal{E}xt^{p-q}_{(\Lambda V,d_2)}(I\!K; (\Lambda V, d_2)) & \xrightarrow{E_2(ev)} & E_2^{p,-q} & = & H^{p-q}(\Lambda V, d_2) \\
\| & & & & \\
\mathcal{E}_\infty^{p,-q} \cong \mathcal{E}xt^{p-q}_{(\Lambda V,d)}(I\!K; (\Lambda V, d)) & \xrightarrow{E_\infty(ev)} & & & E_\infty^{p,-q}
\end{array}$$

puisque $dim\mathcal{E}_2^{p,-q} = 1 = dim\mathcal{E}_\infty^{p,-q}$, du fait que $(\Lambda V, d_2)$ et $(\Lambda V, d)$ sont de Gorenstein (Théorème 2.2.1). Ceci entraîne que $m = p - q = n$ et donc que $E_\infty^{p,-q} \cong H^n(\Lambda V, d)$. D'autre part pour des raisons de dimensions, nous avons $\mathcal{E}_0^{p,-q}(H(\mathcal{A})) = \mathcal{E}xt^{p-q}_{(\Lambda V,d)}(I\!K; (\Lambda V, d))$ et $E_0^{p,-q}(H(\Lambda V, d)) = H^{p-q}(\Lambda V, d)$. Il en résulte que $E_\infty(ev) = \beta_2^{-1} ev_{(\Lambda V,d)} \beta_1$. D'où: (i) implique (iii). $\diamond$

Avant d'ènoncer le théorème rappelons que la suite spectrale de Milnor-Moore convergente vers $H^*(S; I\!K)$ peut être identifiée à partir de terme E_2 à la suite spectrale (*) (cf. [4. Prop. 9.1]).

Théorème 2.4.4 *Soit S un CW-complexe r-connexe de type fini $\mathbb{K}$-elliptique, dans le domaine d'Anick, alors, $prof(H_*(\Omega S;\mathbb{K})) = e_{\mathbb{K}}(S)$ si et seulement si $prof(H_*(\Omega S;\mathbb{K}))$ est égal au plus grand entier p tel que l'image de la classe fondamentale dans le terme E_∞ de $(*)$ est représentée par un cocycle homogène de longueur p.*

Preuve: Supposons que $prof(H_*(\Omega S;\mathbb{K})) = e_{\mathbb{K}}(S) = p$; ce qui équivaut d'après les propositions 2.3.2 et B à $ev_{(\Lambda V,d_2)} \neq 0$. Nous déduisons alors du lemme précédent que $E_\infty(ev) = \beta_2^{-1} ev_{(\Lambda V,d)}\beta_1$ et par suite l'image ω' de la classe fondamentale ω de S vérifie: $\omega' = \lambda[h_\infty(1)] \in E_\infty^{p,-q}$, où $\lambda \in \mathbb{K} - \{0\}$ et $[h_\infty]$ désigne le générateur de $\mathcal{E}_\infty^{p,-q}$. ω' est homogène puisque $E_\infty^{p,-q} = E_2^{p,-q}$. De plus p est le plus grand entier vérifiant cette condition. Réciproquement, si $prof(H_*(\Omega S;\mathbb{K})) = p$ désigne le plus grand entier tel que $\omega' \in E_\infty^{p,*}$, alors, $H^n(\Lambda V,d) \cong E_\infty^{p,-q}$ ($n = p-q$ désigne la dimension formelle de S) et par conséquent $\omega' = \lambda[h_\infty(1)]$. Nous en déduisons que $E_\infty(ev) : \mathcal{E}_\infty^{p,-q} \xrightarrow{\cong} E_\infty^{p,-q}$ est non nulle. Nous utilisons une fois de plus le lemme précédent et la proposition B pour conclure. $\diamond$

Corollaire 2.4.5 *Si S vérifie les hypothèses du théorème, alors, $e_{\mathbb{K}}(S) = prof(H_*(\Omega S;\mathbb{K}))$ entraîne $e_{\mathbb{K}}(S) = e_c(\Lambda V,d)$.*

2.5 Suite spectrale impaire, $\mathcal{E}$xt-version.

Dans l'introduction nous avons rappelé la définition de l'adgc pure $(\Lambda V, d_\sigma)$ associée à une adgc 1-connexe $(\Lambda V,d)$. Rappelons d'autre part ([15]) que la filtration:

$$F^{p,-q} = (\Lambda V)^{\geq p,-q} \text{ avec } (\Lambda V)^{s,-q} = (\Lambda Q \otimes \Lambda^q P)^{s-q},$$

où $Q = V^{pair}$ *et* $P = V^{impair}$, définit la suite spectrale impaire:

$$(*)_\sigma \quad E_2^{p,-q}(\Lambda Q \otimes \Lambda P) = H^{p,-q}(\Lambda Q \otimes \Lambda P), d_\sigma) \Longrightarrow H^{p-q}(\Lambda Q \otimes \Lambda P, d_\sigma).$$

2.5.1 Clôture acyclique de $(\Lambda V, d_\sigma)$.

Soit maintenant $(\Lambda V,d)$ une adgc 1-connexe et $(\Lambda V \otimes \Gamma sV, D)$ la clôture acyclique de $(\Lambda V,d)$ (Exemple 1.2.2). Nous déterminons dans le lemme suivant celle de $(\Lambda V, d_\sigma)$:

Lemme 2.5.1 *L'adgc $(\Lambda V \otimes \Gamma sV, D_\sigma)$ est une clôture acyclique de $(\Lambda V, d_\sigma)$ lorsque D_σ est définie par :*

$$D_\sigma = d_\sigma \text{ sur } V \text{ et } D_\sigma(sx) = x - s(d_\sigma x).$$

Preuve: Nous procédons par récurrence sur $k = dim(V)$. Pour $k = 1$; on a $d_\sigma x_1 = 0$. Ainsi pour $D_\sigma(sx_1) = x_1$, l'adgc $(\Lambda x_1 \otimes \Gamma sx_1, D_\sigma)$ est une résolution acyclique de $(\Lambda x_1, 0)$. Supposons que la résolution $(\Lambda V_{\leq k} \otimes \Gamma sV_{\leq k}, D_\sigma) \xrightarrow{\simeq} I\!K$ est construite pour un $k \geq 2$ et considérons $(\Lambda V_{\leq k+1} \otimes \Gamma sV_{\leq k+1})$. Clairement $d_\sigma(x_{k+1})$ est un cocycle dans $\Lambda V_{\leq k} \otimes \Gamma sV_{\leq k}$. Par hypothèse, $D_\sigma s + sd_\sigma = id - \epsilon$ sur $(\Lambda V_{\leq k})$, d'où $D_\sigma(sd_\sigma x_{k+1}) = d_\sigma(x_{k+1})$. Posons alors: $D_\sigma(sx_{k+1}) = x_{k+1} - sd_\sigma x_{k+1}$. Ceci implique que $D_\sigma s + sd_\sigma = id - \epsilon$ sur $\Lambda V_{\leq k+1}$. Par suite $(\Lambda V_{\leq k+1} \otimes \Gamma sV_{\leq k+1}, D_\sigma)$ est donc une clôture acyclique de $(\Lambda V_{\leq k+1}, d_\sigma)$. $\diamond$

2.5.2 Filtration:

Avec les notations précédentes, posons:

$$(\Lambda V \otimes \Gamma sV)^s_r = \bigoplus_{\substack{a_1,a_2,a_3 \\ r=a_1+a_2+2a_3}} (\Lambda Q \otimes \Gamma^{a_1} sQ \otimes \Lambda^{a_2} P \otimes \Gamma^{a_3} sP)^s,$$

où s désigne le degré total et r le degré filtrant. Une filtration du complexe

$$(A, \mathcal{D}) = (Hom_{(\Lambda V,d)}[(\Lambda V \otimes \Gamma sV, D), (\Lambda V, d)], \mathcal{D}),$$

$$\text{où} \qquad \mathcal{D}(f) = d \circ f + (-1)^{|f|+1} f \circ D$$

est donnée par:

$$\mathcal{F}^p(A^n) = \oplus_{r,s} Hom_{(\Lambda V,d)}((\Lambda V \otimes \Gamma sV)^s_r, (F^{p+n+s+r}(\Lambda V))^{n+s})$$

pour chaque n.

Cette filtration vérifie les propriétés suivantes :

Lemme 2.5.2 *(i): $(\mathcal{F}^p)$ est décroissante.*
(ii): $\mathcal{F}^0(A^n) = \mathcal{F}^p(A^n)$.
(iii): $\mathcal{D}(\mathcal{F}^p(A^n)) \subseteq \mathcal{F}^p(A^n)$.

Preuve : La propriétée (i) est évidente. Pour (ii) nous remarquons que

$$\begin{aligned}
&(F^{n+s+r,*}(\Lambda V))^{n+s} = \{(\Lambda Q \otimes \Lambda P)^{\geq n+s+r,*}\}^{n+s} \\
&= \oplus_k (\Lambda Q \otimes \Lambda P)^{n+s+r+k,-r-k} = \oplus_q (\Lambda Q \otimes \Lambda P)^{n+s+q,-q} \\
&= \{(\Lambda Q \otimes \Lambda P)^{\geq n+s,*}\}^{n+s} = (\Lambda V)^{n+s}.
\end{aligned}$$

Enfin pour (iii), soit $f \in \mathcal{F}^p(A^n)$; on a

$$\mathcal{D}(f) = f \circ D + (-1)^{|f|+1} d \circ f.$$

Or $dF^p \subseteq F^p$; donc $d \circ f \in \mathcal{F}^p(A^n)$. D'autre part

$$f \circ D = f \circ (D_{|\Lambda V} \otimes 1) + f \circ (1 \otimes D_{|\Gamma sV}).\text{Mais}$$

$$d(\Lambda Q \otimes \Lambda^{a_2} P) \subseteq (\Lambda Q \otimes \Lambda^{a_2 - 1} P) \oplus (\Lambda Q \otimes \Lambda^{\geq a_2} P));$$

donc $(D_{|\Lambda V} \otimes 1)$ envoie $(\Lambda V \otimes \Gamma s V)^s_r$ *sur* $(\Lambda V \otimes \Gamma s V)^{s+1}_{r-1} \oplus (\Lambda V \otimes \Gamma s V)^{s+1}_{\geq r}$ et par conséquent $f \circ (D_{|\Lambda V} \otimes 1) \in \mathcal{F}^p(A^n)$.

Pour $f \circ (1 \otimes D_{|\Gamma s V})$, notons d'abord que

$$D(sP) \subseteq P \oplus (\Lambda V \otimes sP) \oplus (\Lambda V \otimes sQ) \quad \text{et}$$

$$D(sQ) \subseteq Q \oplus (\Lambda V \otimes sQ) \oplus (\Lambda V \otimes sP).$$

Ceci implique que $1 \otimes D_{|\Gamma s V}$ envoie aussi $(\Lambda V \otimes \Gamma s V)^s_r$ dans $(\Lambda V \otimes \Gamma s V)^{s+1}_{r-1} \oplus (\Lambda V \otimes \Gamma s V)^{s+1}_{\geq r}$, et par suite $f \circ (1 \otimes D_{|\Gamma s V}) \in \mathcal{F}^p(A^n)$. D'où $f \circ D$ appartient à $\mathcal{F}^p(A^n)$. $\diamond$

Posons maintenant $\mathcal{D}_\sigma = d_\sigma \otimes 1 + 1 \otimes D_\sigma$ et notons $(\mathcal{E}^p_0, \mathcal{D}_0)$ le complexe défini par la filtration précédente. Puisque $D_\sigma(sQ) \subseteq Q$ et $D_\sigma(sP) \subseteq P \oplus (\Lambda Q \otimes sQ)$, il résulte de la démonstration du lemme précédent que $\mathcal{D}_0 = \mathcal{D}_\sigma$ et par suite:

$$\mathcal{E}_1 = H(\mathcal{E}_0, \mathcal{D}_0) = \mathcal{E}xt_{(\Lambda V, d_\sigma)}((\Lambda V \otimes \Gamma s V, \mathcal{D}_\sigma), (\Lambda V, d_\sigma))).$$

Puisque la filtration est bornée, la suite spectrale ainsi construite est convergente; $(**)_\sigma$:

$$\mathcal{E}xt_{(\Lambda V, d_\sigma)}((\Lambda V \otimes \Gamma s V, \mathcal{D}_\sigma), (\Lambda V, d_\sigma)) \Rightarrow \mathcal{E}xt_{(\Lambda V, d)}((\Lambda V \otimes \Gamma s V, D); (\Lambda V, d))$$

Les conséquences immédiates de la convergence de cette suite spectrale sont:

Proposition 2.5.3 *Si L_σ (resp. L) désigne l'algèbre de Lie d'homotopie de $(\Lambda V, d_\sigma)$ (resp. $(\Lambda V, d)$), alors, $prof(UL_\sigma) \leq prof(UL)$.*

Proposition 2.5.4 *Soit $(\Lambda V, d)$ une adgc 1-connexe. Avec les notations précédentes, si la partie linéaire d_1 de d est nulle sur P et V est de dimension finie, alors, $(\Lambda V, d)$ est de Gorenstein .*

Preuve : Nous avons $(d_\sigma)_1(Q) = 0$. D'autre part $d_1(P) \subseteq Q$ entraine que $(d_\sigma)_1(P) = d_1(P) = 0$ et par suite d_σ est décomposable. Le théorème 2.2.1 permet alors de conclure. $\diamond$

2.6 Preuve des théorèmes D et E.

Nous rappellons l'énoncé du théorème E:

Théorème 2.6.1 *Soit S un CW-complexe r-connexe $\mathbb{K}$-elliptique, dans le domaine d'Anick et tel que $gldim(H_*(\Omega S; \mathbb{K})) < \infty$, alors, les images dans les termes E_∞ des suites spectrales de Milnor-Moore, des classes fondamentales de S et de son pur associé admettent un même représentant.*

La démonstration de ce théorème repose sur les suites spectrales précédentes et le théorème suivant. Il met en evidence le résultat de A. Murillo, concernant la classe fondamentale des espaces purs [20].

Théorème 2.6.2 *Soit $(\Lambda V, d)$ une algèbre différentielle graduée commutative 1-connexe, de différentielle décomposable et telle que $dim(V) < \infty$, alors, $dimH(\Lambda V, d_2) < \infty$ si et seulement si $dimH(\Lambda V, d_{\sigma,2}) < \infty$, où $d_{\sigma,2}$ désigne la partie quadratique de d_σ.*

Preuve: Par définition du l' adgc pure, on a $d_{2,\sigma} = d_{\sigma,2}$. Par suite l'implication réciproque resulte de la considération de la suite spectrale impaire $(*)_\sigma$. Supposons maintenant que $dimH(\Lambda V, d_2) < \infty$. Puisque $dimV < \infty$, si $(x_1, \ldots, x_n)$ designe une base de V, le théorème 2.2.1 et le lemme 3.3(iii) de [19] entraînent que $dimH(\Lambda(x_2, \ldots, x_n), \bar{d}_2) < \infty$. On conclut comme dans [3, Prop. 5.2] à l'aide d'un raisonnement par récurrence sur n utilisant le modèle relatif:

$$(\Lambda x_1, 0) \to (\Lambda(x_1, \ldots x_n), d_2) \to (\Lambda(x_2, \ldots x_n), \bar{d}_2)). \quad \diamond$$

Il en résulte facilement:

Corollaire 2.6.3 *Avec les hypothèses du théorème D, on a:*

$$ev_{(\Lambda V, d_2)} \neq 0 \Longleftrightarrow ev_{(\Lambda V, d_{\sigma,2})} \neq 0.$$

Preuve du théorème E: Soit $(\Lambda V, d)$ un modèle minial de S. Puisque les différentielles sont décomposables et V est de dimension finie, alors (Théorème 2.2.1) les complexes $(\Lambda V, d), (\Lambda V, d_\sigma), (\Lambda V, d_2)$ et $(\Lambda V, d_{\sigma,2})$ sont de Gorenstein. Nous déduisons donc des suites spectrales $(**)$ et $(**)_\sigma$ les isomorphismes suivants :

$$\psi_1 : \mathcal{E}xt^{p,-q}_{(\Lambda V, d_{\sigma,2})}(I\!K, (\Lambda V, d_{\sigma,2})) \cong \mathcal{E}xt^{p,-q}_{(\Lambda V, d_\sigma)}(I\!K, (\Lambda V, d_\sigma)),$$
$$\psi_2 : \mathcal{E}xt^{p,-q}_{(\Lambda V, d_2)}(I\!K, (\Lambda V, d_2)) \cong \mathcal{E}xt^{p,-q}_{(\Lambda V, d)}(I\!K, (\Lambda V, d)),$$
$$\psi_3 : \mathcal{E}xt^{p,-q}_{(\Lambda V, d_{\sigma,2})}(I\!K, (\Lambda V, d_{\sigma,2})) \cong \mathcal{E}xt^{p,-q}_{(\Lambda V, d_2)}(I\!K, (\Lambda V, d_2)),$$
$$\psi_4 : \mathcal{E}xt^{p,-q}_{(\Lambda V, d_\sigma)}(I\!K, (\Lambda V, d_\sigma) \cong \mathcal{E}xt^{p,-q}_{(\Lambda V, d)}(I\!K, (\Lambda V, d)).$$

D'autre part puisque $gldim(H_*(\Omega S; I\!K))$ est finie, nous avons $ev_{(\Lambda V, d_2)} \neq 0$ (Proposition 3.2) et $ev_{(\Lambda V, d_{\sigma,2})} \neq 0$ (Corollaire 6.3).

Nous déduisons alors que si $[h], [h_2], [h_\sigma]$ et $[h_{\sigma,2}]$ sont les générateurs des différents $\mathcal{E}xt$, alors la classe fondamentale [h(1)] de $(\Lambda V, d)$ vérifie :

$$[h(1)] = [\psi_2(h_2)(1)] = [\psi_2 \circ \psi_3(h_{\sigma,2})(1)] \text{ et que } [h_\sigma(1)] = [\psi_1(h_{\sigma,2})(1)].$$

D'autre part, nous avons $\psi_4 \circ \psi_1(h_{\sigma,2}) = \psi_2 \circ \psi_3(h_{\sigma,2})$. Donc $[h(1)] = [\psi_4(h_\sigma)(1)]$. Mais $[h_\sigma(1)]$ est en fait la classe fondamentale de $(\Lambda V, d_\sigma)$ puisque $H(\Lambda V, d_\sigma)$ est à dualité de Poincaré et $[h_\sigma]$ est l'unique générateur de $\mathcal{E}xt^{p,-q}_{(\Lambda V, d_\sigma)}(I\!K, (\Lambda V, d_\sigma))$ (cf. [8, section 1]).

En reprenant alors le même argument que celui utilisé pour démontrer le lemme 4.3; nous déduisons à l'aide des suites spectrales $(*)$ et $(*)_\sigma$ que les images dans le terme E_∞ de ces deux classes sont égales. $\diamond$

2.7 Attachements inerts et paresseux

Nous rappelons au début les principales définitions utiles dans cette section (cf. [26]).

Soit $f : S^n \longrightarrow S$ une application continue et $Y = S \cup_f e^{n+1}$. Notons F la fibre homotopique de $\Omega i : \Omega S \longrightarrow \Omega Y$ induite par l'inclusion $i : S \hookrightarrow Y$ et $\delta : \Omega Y \longrightarrow F$ le connectant relatif à cette fibration.

Definition 2.7.1 (i): f est dit inert si $H_*(\Omega i)$ est surjective.
(ii): f est dit paresseux si $H_*(\delta) = 0$, i.e. $H_+(\delta) = 0$.

Notons $f' : S^{n-1} \longrightarrow \Omega S$ l'adjoint de f et $f'' \in H_{n-1}(\Omega S)$ l'image de la classe de f' par l'homomorphisme d'Hurewicz. Nous avons alors $H_*(\Omega i)(f'') = 0$ et par conséquent $H_*(\Omega i) = j \circ q$ où q désigne l'application quotient $q : H_*(\Omega S) \longrightarrow H_*(\Omega S)/(f'')$ et j l'application induite $j : H_*(\Omega S)/(f'') \longrightarrow H_*(\Omega Y)$. Les résultats essentiels sur le caractère inert sont résumés dans le théorème suivant (cf. [26], [24], [25])

Théorème 2.7.2 *Les propriétés suivantes sont équivalentes:*

(i): f est inert.

(ii): j est surjective.

(iii): j est bijective.

(iv): q induit une injection sur $Tor_2(\mathbb{K}, \mathbb{K})$ et est une bijection sur $Tor_p(\mathbb{K}, \mathbb{K})$ pour $p \geq 3$;

(iv): l'algèbre de Pontryagin $H_*(\Omega F; \mathbb{K})$ est une algèbre tensoriel.

Pour les attachements paresseux nous avons essentiellement:

Théorème 2.7.3 *f est paresseux si et seulement si tous les produits "cup" dans $H^*(F; \mathbb{K})$ sont nuls.*

Remarque 2.7.4 (i) Si f est inert, aucune nouvelle classe d'homologie n'est produite dans $H_*(\Omega Y; \mathbb{K})$, par contre seulement l'idéal engendré par f'' est tué dans $H_*(\Omega S; \mathbb{K})$.
(ii): Le caractère inert entraîne le caractère paresseux, mais la réciproque est fausse en général.

Théorème F *Soit X un CW-complexe 1-connexe de type fini vérifiant l'une des hypothèse suivantes:*

(i): $H_*(\Omega X; \mathbb{K})$ est notherien et $2 \leq gldim(H_*(\Omega S; \mathbb{K})) < \infty$,

(ii): X est $\mathbb{K}$-elliptique et $2 \leq prof(H_*(\Omega X; \mathbb{K}))$.

Alors $H_*(\Omega X; \mathbb{K})$ ne contient aucun élément inert.

Preuve: (i): Soit $Y = S \cup_f e^n$ où f désigne une application d'attachement. Supposons que f est inert. Puisue $H_*(\Omega i)$ est surjective, la condition (i) entraîne que $H_*(\Omega Y; I\!K)$ est aussi notherien et que $gldim(H_*(\Omega S; I\!K) = gldim(H_*(\Omega Y; I\!K) < \infty$. Comme $prof(H_*(\Omega S; I\!K) \leq gldim(H_*(\Omega S; I\!K)$ et de même pour $H_*(\Omega Y; I\!K)$, ces deux ahg sont $I\!K$-elliptiques et donc de Gorenstien ([9, Th. C et Prop. 3.1]). Notons $P_{\Omega S}$ et $P_{\Omega Y}$ leurs series de Hilbert-Poincarré, nous avons alors ([9, Prop. 3.6])

$$P_{\Omega S} = \frac{\Pi_{j=1}^{q}(1+t^{2a_j+1})}{\Pi_{j=1}^{r}(1+t^{2a'_j})} \quad \text{et} P_{\Omega Y} = \frac{\Pi_{j=1}^{s}(1+t^{2b_j+1})}{\Pi_{j=1}^{r}(1+t^{2b'_j})}$$

où r désigne $prof(H_*(\Omega S; I\!K)$ laquelle coincide dans ce cas avec $prof(H_*(\Omega Y; I\!K)$ du fait que pour une ahg de Gorenstien de dimension globale finie, celle-ci est égale à sa profondeur ([12]). D'autre part d'après ([F,T]) f inert implique que $P_{\Omega S}^{-1}(t) + t^n = P_{\Omega Y}^{-1}$, la contradiction résulte alors des expréssions précédentes.
(ii) Notons aussi $Y = S \cup_f e^n$ et supposons que f est inert. Ceci entraîne que, Y est $I\!K$-elliptique. En effet: d'une part, $cat(S) < \infty$ implique que $cat(Y) < \infty$ et $prof(H_*(\Omega Y; I\!K)) < cat(Y) < \infty$ et d'autre part, puisque $H_*(\Omega S; I\!K)$ est notherien, il en est de même pour $H_*(\Omega Y; I\!K)$. En termine alors en utilisant de nouveau les series de Hilbert-Poicarré de S et Y. $\diamond$

Remarque 2.7.5 Si $gldim(H_*(\Omega S; I\!K) = 1$, la conclusion n'est plus vraie. En fait, pour $S = S^n$ nous avons $H_*(\Omega S; I\!K)) \cong T(V)$, $gldim(T(V)) = 1$ (cf. Corollaire 1.1.12) et $H_*(\Omega Y; I\!K)) \cong T(V)/ < \omega >$; i.e. tous les attachements sont inerts.

2.8 Exemples:

Dans cette section nous allons donner des exemples d'espaces $I\!K$elliptiques pour lesquels $gldim(H_*(\Omega S; I\!K))$ est finie et d'autres pour lesquels celle-ci est infinie. noussupposons que $(S, I\!K)$ est dans le domaine d'Anick; i.e: vérifie la condition (ξ).

(1) Si S est un espace 1-connexe $I\!K$-elliptique tel que $E_{impair} = 0$, alors la différentielle du modèle minimal $(\Lambda V, d)$ est nulle et la classe fondamentale de S est représentée par $y_1.y_2....y_m$, où $y_1, y_2, ...$et y_m forment une base de V^{impair} et $m = prof(H_*(\Omega S; I\!K))$. Il résulte du théorème B que $gldim(H_*(\Omega S; I\!K))$ est finie.

(2) D'après la proposition 2.1, tout espace S, 1-connexe, $I\!K$-elliptique, de différentielle quadratique ($d = d_2$) vérifie $gldim(H_*(\Omega S; I\!K)) < \infty$.

<u>Exemple</u> 2.1: $I\!K = \mathbb{Q}$ *et* $S = Sp(5)/SU(5)$. Son modèle minimal est de la forme:

$$(\Lambda(x_6, x_{10}, y_{11}, y_{15}, y_{19}), d); dx_6 = dx_{10} = 0, dy_{11} = x_6^2,\ dy_{15} = x_6 x_{10}$$
$$et\ dy_{19} = x_{10}^2$$

et sa classe fondamentale est $\omega = [y_{11}x_{10}^2 - y_{15}x_6x_{10}]$.

Exemple 2.2: $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ *et* $S = SU(6)/SU(3) \times SU(3)$ de modèle minimal:

$$(\Lambda(x_4, x_6, y_7, y_9, y_{11}), d); dx_4 = dx_6 = 0,\ dy_7 = -x_4^2\ ,\ dy_9 = -2x_4x_6 \quad et\ dy_{11} = -x_6^2$$

Sa classe fondamentale est $\omega = [y_9x_4x_6 - 2y_7x_6^2]$.

(3) La somme connexe $S = CP(2)\#CP(2)$ admet un modèle de Sullivan de la forme:

$$((\Lambda x_1, y_1) \oplus (\Lambda x_2, y_2) \oplus \mathbb{K}u, d)$$

avec $|x_1| = |x_2| = 2,\ dx_1 = dx_2 = 0,\ dy_1 = x_1^3,\ dy_2 = x_2^3,$ et $du = x_1^2 - x_2^2$.

Son modèle minimal est par suite:

$$(\Lambda(x_1, x_2, u, v), d) \text{ avec } du = x_1^2 - x_2^2 \text{ et } dv = x_1x_2$$

et sa classe fondamentale est $\omega = [x_1^2 - x_2^2]$. Donc $prof(H_*(\Omega S;\mathbb{Q})) = e_{\mathbb{Q}}(S)$. $gldim(H_*(\Omega S;\mathbb{Q}))$ est donc finie et est égale à 2.

(4) L'espace homogène $S = U(4)/U(2) \times U(2)$ admet un modèle minimal de la forme:

$$(\Lambda(x_2, x_4, y_5, y_7), d)\ ;\ dx_2 = dx_4 = 0;\ dy_5 = x_2^3 - 2x_2x_4;\ dy_7 = x_4^2 - x_2^2x_4.$$

Sa classe fondamentale est $[-x_2^2x_4] \in H^8(U(4)/U(2) \times U(2))$; i.e. $e_{\mathbb{Q}}(S) = 3$. Comme $prof(H_*(\Omega S;\mathbb{Q})) = dim(\pi_{impair}(S)) = 2$, le théorème B entraîne alors que $gldim(H_*(\Omega S;\mathbb{Q}))$ est infinie.

(5) L'espace projectif complexe CP^n admet pour modèle minimal sur tout corps $\mathbb{K}$:

$$(\Lambda(x, y), d) \text{ avec } |x| = 2, |y| = n + 1,\ dx = 0 \text{ et } dy = x^{n+1}.$$

Nous obtenons alors: $e_{\mathbb{K}}(S) = n$ *et* $prof(H_*(\Omega S; \mathbb{K})) = 1$ et $gldim(H_*(\Omega S; \mathbb{K}))$ est donc infinie. En remarquant que l'algèbre de Lie d'homotopie E est abèlienne, nous retrouvons ce résultat.

Nous terminons cette série d'exemples par deux espaces dont le modèle minimal admet une algèbre d'homotopie de Lie de dimension infinie. Nous nous restreinions au cas rationnel.

(6) Soit S la variété $M_{2n}^g = S^n \times S^n\#......\#S^n \times S^n$, somme connexe de g copies de $S^n \times S^n$, avec n impair. Dans [4, Prop. 7.7] Y. Félix et S. Halperin ont calculé son modèle minimal. Pour ($n \geq 3$ *et* $g \geq 2$) ce modèle est de la forme: $(\Lambda V, d)$ avec V concentré en degrés impairs et $d = d_2$. En particulier $dimH(\Lambda V, d_\sigma) = \infty$. Or $cat_{\mathbb{Q}}(\Lambda V, d_2) = gldim(UE)$ ([7, §3]) et $cat_{\mathbb{Q}}(\Lambda V, d_2) \leq sup\{n \mid H^n(S;\mathbb{Q}) \neq 0\}$ ([4, Th. 4.7]), S est donc un espace à dualité de Poincaré tel que $gldim(H_*(\Omega S;\mathbb{Q})) < \infty$. De plus $prof(H_*(\Omega S;\mathbb{Q})) = e_{\mathbb{Q}}(S) = cat_{\mathbb{Q}}(S) = 2$.

(7) Considérons la somme connexe $S = M \# M$, où $M = U(4)/U(2) \times U(2)$. D'après ([14]) M est un espace formel et par conséquent ([4, Prop 7.4]) S l'est aussi. Son modèle minimal est donc celui de

$$(\Lambda(x_2, x_4, y_5, y_7) \oplus (\Lambda(x'_2, x'_4, y'_5, y'_7) \oplus \mathbb{Q}u, D)$$

avec $Du = x_4'^2 - x_4^2$ (pour les autres générateurs, D coincide avec la différentielle d de l'exemple (4)). Le calcul des premiers générateurs du modèle minimal $(\Lambda V, d)$ de cet espace, montre que $dim(V^{impair}) \geq 9$. Par conséquent $dim(V) = \infty$, sinon S serait elliptique et par suite $prof(H_*(\Omega S;\mathbb{Q})) = dim(V^{impair}) \leq cat_{\mathbb{Q}}(S) \leq 8$. D'autre part le cocycle x_2^4 représente une classe non nulle dans $(\Lambda V, d_2)$. Ceci entraîne que $gldim(H_*(\Omega S;\mathbb{Q}))$ est infinie, puisque dans le cas contraire nous aurons $gldim(H_*(\Omega S;\mathbb{Q})) = prof(H_*(\Omega S;\mathbb{Q})) = cat_{\mathbb{Q}}(S)$. Or, ([6, Th. 2]), $cat_{\mathbb{Q}}(S) = e_{\mathbb{Q}}(S) = 3$ et (Proposition 2.1) $gldim(H_*(\Omega S;\mathbb{Q})) = sup\{k/H^{k,*}(\Lambda V, d_2) \neq 0\}$. On en déduit aussi que $prof(H_*(\Omega S;\mathbb{Q}) < 3$, sinon, $cat_{\mathbb{Q}}(S) = gldim(H_*(\Omega S;\mathbb{Q}))$ serait infinie.

2.9 Réferences:

[1] D. Anick, *Hopf algebras up to homotopy* , J. Amer. Math. Soc. 2 (1989) 417-453.

[2] L. Bisiaux, *Depth and Toomer's invariant* , A paraître dans, Topology and its Applications.

[3] Y. Félix, *La dichotomie elliptique-hyperbolique en homotopie rationnelle,* Astérisque 176, (1989).

[4] Y. Félix and S. Halperin, *Rational L-S category and its applications,* Trans. Amer. Math. Soc, 273 (1982),1-73.

[5] Y. Félix, S. Halperin and J. M. Lemaire and J. C. Thomas, *Mod p loop space homology,* Inven. Math. 95, 247-262 (1989).

[6] Y. Félix, S. Halperin and J.M. Lemaire, *The Ganea conjecture and the L-S category of Poincaré duality complexes,* Preprint, Univ Nice (1997).

[7] Y. Félix, S. Halperin and J. C. Thomas, *The Homotopy Lie algebra for finite complexes,* Publ. I.H.E.S. 56 (1983) 89-96.

[8] Y. Félix, S. Halperin and J. C. Thomas, *Gorenstein spaces,* Adv in Maths 71 (1988) 92-112 .

[9] Y. Félix, S. Halperin and J. C. Thomas, *Elliptic Hopf algebras,* J. London. Math. Soc. (2) 43 (1991) 545-555.

[10] Y. Félix, S. Halperin and J. C. Thomas, *Hopf algebres of polynomial growth,* J. Algebra 125 (1989) 408-417.

[11] Y. Félix, S. Halperin and J. C. Thomas, *Rational Homotopy Theory*, Preprint Université d'Angers (1997).

[12] Y. Félix, S. Halperin and J. C. Thomas, *Hopf algebras and a counterexample to a conjecture of Anick*, J. of. Algebra, 169 (1994) 176-193.

[13] Y. Félix, S. Halperin, C. Jacobson, C. Löfwall and J. C. Thomas, *The radical of the homotopy Lie algebra*, Amer. J. Math. 110. (1988), 301-322.

[14] W.H. Greub, S. Halperin and J.R. Vanstone, *Connexions, Curvatures and Cohomology*, Vol. III (Academic Press, New York, 1975).

[15] S. Halperin, *Finiteness in the minimal models of Sullivan*, Trans. Amer. Math. Soc. 230 (1977), 173-199.

[16] S. Halperin, *Universal enveloping algebras and loop space homology*, J. Pure Appl. Algebra 83 (1992) 237-282.

[17] S. Halperin. and J.-M. Lemaire, *Notion of category in differential algebra*, In *Algebraic Topology - Rationnal Homotopy*, Lecture Notes in Mathematics, 1318 (1988), 138-154.

[18] I. James, *On category, in the sense of Lusternik-Schnirelmann*, Topology 17 (1978), 331-348.

[19] A. Murillo, *The evaluation map of some Gorenstien algebras*, J. Pure. Appl. Algebra 91 (1994) 209-218.

[20] A. Murillo, *The Top cohomology class of certain spaces*, J. Pure. App. Algebra, 84 (1993) 209-214.

[21] J. P. Serre, *Algèbre locale, Multiplicités*, Lecture Notes in Mathematics, 11 (1975).

[22] D. Sullivan, *Infinitesimal computations in topology*, Inst. Hautes. Études Sci. Publ. Math. 47 (1978), 269-331.

[23] G. H. Toomer. *Lusternik-Schnirelmann category and the Moore spectral sequence*, Math. Z. 138 (1974), 123-143.

[24] Y. Félix and J.M. Lemaire, *On the Pontryagin algebra of the loops on a spacec with a cell attached*, Int. J. Math. 2 (1991) 429-438.

[25] Y. Félix and J.C Thomas, *Effet d'un attachement cellulaire dans l'Homologie de l'espace des lacets*, Ann. Inst. Fourier, 39,1 (1989) 207-224.

[26] S. Halperin and J.M. Lemaire, *The fiber of a cell attachement*, Proc. of Edinburgh Math. Soc. 38, (1995) 295-311.

Chapitre 3. Sur la conjecture de l'Omnibus[2]

3.1 Introduction

Dans tout ce chapitre, X désigne un espace qui possède le type d'homotopie d'un CW-complexe simplement connexe de type fini. Nous désignons par $\mathbb{F}_p$ le corps premier de caractéristique p i.e. $\mathbb{F}_p = \mathbb{Q}$ si $p = 0$ et $\mathbb{F}_p \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ si p est premier.

La conjecture de l'Omnibus est un problème ouvert depuis plus de quinze ans en homotopie.

Conjecture 3.1.1 *Si $dim H^{pair}(X;\mathbb{F}_p) < \infty$ et $H_*(\Omega X;\mathbb{F}_p)$ est une algèbre de Hopf elliptique, alors l'algèbre $H^*(X;\mathbb{F}_p)$ satisfait la dualité de Poincaré.*

Rappelons que $H^*(X;\mathbb{F}_p)$ est une algèbre à *dualité de Poincaré* de dimension formelle n, s'il existe un élément ω tel que $H^n(X;\mathbb{F}_p) = \mathbb{F}_p\omega$ (ω est appelée classe fondamentale de X), si $H^i(X;\mathbb{F}_p) = 0$ pour tout $i > n$ et si la multiplication dans $H^*(X;\mathbb{F}_p)$ induit une forme bilinéaire non dégénérée:

$$H^i(X;\mathbb{F}_p) \otimes H^{n-i}(X;\mathbb{F}_p) \to \mathbb{F}_p.$$

Nous rappelons aussi qu'une algèbre de Hopf est *elliptique* si elle est finiment engendrée en tant qu'algèbre et nilpotente en tant qu'algèbre de Hopf ($[FHT_1]$). Toute algèbre elliptique étant de Gorenstein ($[FHT_1, Prop\,3.1]$), le théorème 3.1 de $[FHT_3]$ d'une part et le théorème 2 de $[FM]$ d'autre part entraîne que la conjecture $(*)$ est équivalente aux deux conjectures suivantes:

Conjecture 3.1.2 *Si $dim H^{pair}(X;\mathbb{F}_p) < \infty$ et $H_*(\Omega X;\mathbb{F}_p)$ est une algèbre de Hopf elliptique, alors l'algèbre $H^*(X;\mathbb{F}_p)$ est de dimension finie.*

Conjecture 3.1.3 *Si $\dim H^{pair}(X;\mathbb{F}_p) < \infty$ et $H_*(\Omega X;\mathbb{F}_p)$ est une algèbre de Hopf elliptique, alors l'application $\bar{\varepsilon}$ induite par l'augmentation canonique $\epsilon : H_*(\Omega X;\mathbb{F}_p) \to \mathbb{F}_p$,*

$$\bar{\varepsilon} : \; Ext_{\,H_*(\Omega X;\mathbb{F}_p)}(\mathbb{F}_p, H_*(\Omega X;\mathbb{F}_p)) \to \; Ext_{\,H_*(\Omega X;\mathbb{F}_p)}(\mathbb{F}_p, \mathbb{F}_p)$$

est non nulle.

D'après le théorème de Cartan-Serre, $H_*(\Omega X;\mathbb{Q})$ est une algèbre de Hopf elliptique si et seulement si $dim(\pi_*(\Omega X)\otimes\mathbb{Q}) < \infty$. Dans ce cas d'après ([M. Th A]), l'application d'évaluation, définie dans $[FHT_3]$,

$$ev_X : \; \mathrm{Ext}_{\,C^*(X;\mathbb{Q})}(\mathbb{Q}, C^*(X;\mathbb{Q})) \to H^*(X;\mathbb{Q}),$$

[2]Ce travail est à paraitre aux Ann. Soc. Math. B.

est aussi non nulle.

Dans la première partie de ce travail nous démontrons la conjecture 3.1.1 pour trois types d'espaces dont nous rappellons les définitions.

Definition 3.1.4 (i): Un espace X est *p-formel* s'il existe une $\mathbf{F}_p$-algèbre différentielle (A,d), et deux quasi-isomorphismes:

$$(C^*(X;\mathbf{F}_p),d) \xleftarrow{\simeq} (A,d) \xrightarrow{\simeq} (H^*(X;\mathbf{F}_p),0).$$

(ii): Un espace X est dit *faiblement formel* si son modèle filtré $(\Lambda Z, D)$ est minimal (cf. [HS, Th. 7.20] pour les propriétés quivalentes). (iii): Un espace topologique est dit *p-quasi-fini* si son p-localisé est l'espace total d'une fibration de base un produit fini d'espaces d'Eilenberg-MacLane dont l'homotopie est concentrée en degrés pairs et de fibre un espace p-elliptique [FHT_2].

Par exemple, les espaces classifiants des groupes de Lie compacts sont p-formels pour $p=0$ ou pour tout premier p. Si G est un groupe de Lie connexe et X désigne la base d'un G-fibré principal différentiable, alors X est p-quasi-fini pour $p=0$.

Théorème A *La conjecture 3.1.1 est vraie*
(i): pour tout espace p-formel lorsque p désigne un nombre premier impair.
(ii): pour tout espace $\mathbb{Q}$-faiblement formel. En particulier pour tout espace rationnellement formel
(iii): pour tout espace rationnellement quasi-fini.

A l'aide de l'équivalence des conjectures 3.1.2 et 3.1.3 et du théorème 1. de [FM], nous déduisons immédiatement :

Corollaire 3.1.5 *Supposons que*
(i) $\dim H^{pair}(X;\mathbf{F}_p) < \infty$,
(ii) $H_*(\Omega X;\mathbf{F}_p)$ *est une algèbre de Hopf elliptique,*
(iii) X est p-formel, ou rationnellement quasi-fini,
alors, $gldim(H_*(\Omega X;\mathbf{F}_p)) < \infty$ *et* $\dim \mathrm{Ext}_{H_*(\Omega X;\mathbf{F}_p)}(\mathbf{F}_p,\mathbf{F}_p) < \infty$.

Si X est un espace rationnellement quasi-fini, on a une fibration

$$(\mathcal{F}) \qquad F \xrightarrow{j} X_{(0)} \xrightarrow{\varphi} K$$

où K désigne un produit fini d'espaces d'Eilenberg MacLane,

$$K = \Pi_i (K(\mathbb{Q},2n_i))^{b_i}$$

et où F est un espace rationnel elliptique Dans ce cas le rang de $H^*(\varphi)$ est fini et du théorème A-(ii), on déduit que $catX_{(0)}$ est fini. Cette remarque relie la conjecture de l'ommibus à la question suivante, posée par J-C. Thomas, ([T], Pb. 33) : .

Question: *Soit $F \xrightarrow{j} E \xrightarrow{\varphi} B$ une fibration de Hurewicz. Supposons que B et F sont simplement connexes de type fini, que $catF_{(0)} < \infty$, et que le rang de l'application linéaire $H^*(\varphi;\mathbb{Q})$ est fini. Sous ces conditions la catégorie rationnelle de E, $catE_{(0)}$, est-elle finie ?*

Si l'on suppose en outre que $H^*(B;\mathbb{Q})$ est une algèbre noetheriene alors la réponse à cette question est oui. En effet pour tout corps $\mathbf{k}$ et toute fibration $F \xrightarrow{j} E \xrightarrow{\varphi} B$ orientable, si $H^*(F;\mathbf{k})$ est de dimension finie et $H^*(B;\mathbf{k})$ est une algèbre noetherienne alors $H^*(E;\mathbf{k})$ est un $H^*(B;\mathbf{k})$-module noetherien. Un exemple dû à N. Dupont ([D]) montre que la finitude de la catégorie n'est pas vraie en général. (Cf §IV).

Notre second résultat montre que cette question admet une réponse affirmative pour certaines fibrations de type $(\mathcal{F})$ et met en évidence la différence de comportement dans le cas rationnel et dans le cas où $p > 2$.

Théorème B *Soient $\mathbf{k}$ un corps et $(\mathcal{F}) : F \to X \xrightarrow{\varphi} K$, une fibration telle que K est un produit fini d'espaces d'Eilenberg-MacLane, $K = \prod_i K(\mathbf{k}, 2i)$, et pour laquelle $dimH^{pair}(X;\mathbf{k}) < \infty$. Alors,*

a) si $\mathbf{k} = \mathbb{Q}$, $dimH^*(F;\mathbb{Q}) < \infty \Longleftrightarrow dimH^*(X;\mathrm{Q}) < \infty$,

b) si $\mathbf{k} = \mathbf{F}_p$, $p > 2$, si X est p-formel et si $H_*(\Omega X;\mathbf{F}_p)$ est une algèbre de Hopf elliptique alors, pour l'action d'holonomie de ΩK sur F, $H^*(F;\mathbf{F}_p)$ est un A-module libre où A est une sous-algèbre de $H_*(\Omega K;\mathbf{F}_p)$ telle que $H_*(\Omega K;\mathbf{F}_p) \cong A \otimes H$ et $dimH < \infty$.

3.2 Preuve du Théorème A

L'objet de ce paragraphe est de démontrer respectivement la conjecture 3.1.1 dans les cas p-formel, $p > 2$, $\mathbb{Q}$-faiblement formel et dans le cas rationnellement quasi-fini.

Preuve de (i):

Pour le cas p-formel les algèbres différentielles $C^*(X;\mathbf{F}_p)$ et $(H^*(X,\mathbf{F}_p), 0)$ admettent un même modèle libre $(T(V), d)$ (cf, [HL] et [El] pour plus de détails). D'autre part $H^*(X,\mathbf{F}_p)$ étant commutative, d'après [H, Th 7.1], si $p > 2$, l'algèbre différentielle $(H^*(X,\mathbf{F}_p), 0)$ admet un modèle minimal commutatif $(\Lambda W, d)$. Il résulte alors de [H_2, Th 6.4]) que nous avons :

$$H_*(\Omega X;\mathbf{F}_p) \cong UE$$

où $E = Hom(sW, \mathbf{F}_p)$. Nous savons aussi ([$FHT_1$]) que $H_*(\Omega X;\mathbf{F}_p)$ est elliptique si et seulement si $dimW < \infty$.

La partie (i) du théorème A résulte alors du lemme suivant:

Lemme 1: *Si p désigne un nombre premier impair, soit W un $\mathbf{F}_p$-espace vectoriel de dimension finie et $(\Lambda W, d)$ un modèle minimal commutatif, alors,*

$$dim H^{pair}(\Lambda W, d) < \infty \text{ si et seulement si } dim H(\Lambda W, d) < \infty.$$

Preuve: Remarquons tout d'abord que pour tout $w \in W$, $dw^p = pw^{p-1}dw = 0$. Par définition de la minimalité, il existe une base $(w_1, w_2, \ldots, w_n)$ de W telle que

$$(\xi) : dw_i \in \Lambda(w_1, ..., w_{i-1}) \qquad i = 1, 2, ..., n.$$

Pour tout $i \geq 1$, $J_i = \Lambda^+(w_1, ..., w_i)\Lambda W$ est un idéal différentiel de $(\Lambda W, d)$ et le quotient $(\Lambda W, d)/J_i$ s'identifie à $(\Lambda(w_{i+1}, ..., w_n), \bar{d})$. L'hypothèse $dim H^{pair}(\Lambda W, d) < \infty$ entraîne que w_n est de degré impair et par conséquent $dim H(\Lambda(w_n), 0) < \infty$. Supposons que pour un certain i, $dim H(\Lambda(w_i, ..., w_n)\, \bar{d}) < \infty$ et distinguons deux cas:

(a) $deg(w_{i-1})$ est impair:

La suite spectrale obtenue à partir de la filtration

$$F^p(\Lambda(w_{i-1}, ..., w_n)) = (\Lambda(w_{i-1}))^{\geq p} \otimes \Lambda(w_i, ..., w_n)$$

converge de $\Lambda(w_{i-1})^p \otimes H^q(\Lambda(w_i, ..., w_n), \bar{d})$ vers $H^{p+q}(\Lambda(w_{i-1}, ..., w_n), \bar{d})$. L'hypothèse de récurrence entraîne que $dim H(\Lambda(w_{i-1}, ..., w_n), \bar{d}) < \infty$.

(b) $deg(w_{i-1})$ est pair:

Dans ce cas, puisque $dim H^{pair}(\Lambda W, d) < \infty$, il existe $\phi \in \Lambda W$ et un entier k tel que $w_{i-1}^{kp} = d\phi$. Par suite $w_{i-1}^{kp} = \bar{d}\psi$ avec $\psi \in \Lambda(w_{i-1}, ..., w_n)$ désignant la classe de ϕ modulo l'idéal $(w_1, ..., w_{i-2})$. Considérons l'inclusion

$$(\Lambda(w_{i-1}, ..., w_n), \bar{d}) \hookrightarrow (\Lambda(w_{i-1}, ..., w_n) \otimes \Lambda u, \bar{D})$$

telle que $\bar{D}u = w_{i-1}^{kp}$. Nous avons alors le quasi-isomorphisme:

$$(\Lambda(w_{i-1}, ..., w_n), \bar{d}) \otimes (\Lambda u, 0) \xrightarrow{\Phi} (\Lambda(w_{i-1}, ..., w_n, u), \bar{D})$$

avec $\Phi(u) = u - \psi$. En utilisant la suite spectrale,

$$H^p(\Lambda(w_{i-1}, u), \bar{D})) \otimes H^q(\Lambda(w_i, ..., w_n), \bar{d}) \Rightarrow H^{p+q}(\Lambda(w_{i-1}, ..., w_n, u), \bar{D})$$

et l'hypothèse de récurrence, nous déduisons que $dim H(\Lambda(w_{i-1}, ..., w_n, u), \bar{D}) < \infty$ et par suite $dim H(\Lambda(w_{i-1}, ..., w_n), \bar{d}) < \infty$. Ainsi nous avons montré par récurrence sur i que $dim H(\Lambda W, d) < \infty$.$\diamond$

$H(\Lambda U \otimes \Lambda V, d)$ avec comme terme $E_2 = (\Lambda U) \otimes H(\Lambda V, \bar{d})$. Comme $dim H(\Lambda V, \bar{d}) < \infty$, E_2 est un ΛU-module finiment engendré. Il en résulte que E_∞ et par suite $H(\Lambda U \otimes \Lambda V, d)$ est un ΛU-module finiment engendré, et donc un $\Lambda U/(d(V))$-module finiment engendré. Nous concluons enfin en utilisant l'hypothèse $dim H^{pair}(\Lambda U \otimes \Lambda V, d) < \infty$. $\diamond$

3.3 Preuve du Théorème B

Preuve du (a):

Considérons la suite spectrale de Serre associée à la fibration $(\mathcal{F})$. Son terme E_2 est un module de type fini sur l'algèbre noetherienne $H^*(K;\mathbb{Q})$ et par conséquent E_∞ est un $\varphi^*(H^*(K;\mathbb{Q}))$-module de type fini. Comme $\varphi^*(H^*(K,\mathbb{Q})) \subseteq H^{pair}(K;\mathbb{Q})$, E_∞ est donc de dimension finie. Il s'en suit que $H^*(X;\mathbb{Q})$ est de dimension finie. Réciproquement Supposons que : $dim H^*(X;\mathbb{Q}) < \infty$ et considérons la fibration,

$$\Omega K \xrightarrow{\partial} F \xrightarrow{i} K$$

déduite de la fibration $(\mathcal{F})$. La suite spectrale de Serre associée à cette fibration a pour terme $E_2 = H^*(X;\mathbb{Q}) \otimes H^*(\Omega K;\mathbb{Q})$ et converge vers $H^*(F;\mathbb{Q})$. Comme $H^*(\Omega K;\mathbb{Q}) = \Lambda(y_1, ..., y_m)$ avec $deg(y_j)$ impair, nous avons $dim E_2 < \infty$ et par suite $dim H^*(F;\mathbb{Q}) < \infty.\diamond$

Preuve du (b):

D'après le théorème A(i), $dim H^*(X;\mathbb{F}_p) < \infty$ et par conséquent le p-localisé $X_{(p)}$ a le type d'homotopie d'un CW-complexe fini. Le résultat résulte alors directement du théorème 2 de ([FT]).$\diamond$

3.4 Contre-exemple de N. Dupont

Soit $F \to E \xrightarrow{\varphi} B$ une fibration vérifiant les conditions de la question mentionnée en fin de section 1. Nous explicitons ici l'exemple de N. Dupont montrant que les conditions proposées sont insuffisantes pour assurer la finitude de la catégorie rationnelle de E.

Considérons en effet la fibration rationnelle dont un modèle relatif est donné par

$$(\Lambda U, d) \overset{i}{\hookrightarrow} (\Lambda U \otimes \Lambda V, d) \to (\Lambda V, \bar{d}),$$

avec (l'indice de chaque générateur désignant son degré)

$$(\Lambda U, d) = (\Lambda(a_4, b_3, u_4, v_3, x_6), d),$$

$$da = db = du = dv = 0, dx = ab + uv,$$

et

$$(\Lambda U \otimes \Lambda V, d) = (\Lambda U \otimes \Lambda(\overline{a}, \overline{u}, y), d),$$
$$d\overline{a} = a, d\overline{u} = u, dy = bv.$$

Nous avons,
(i) U et V sont de type fini
(ii) La fibre de ce modèle relatif est un modèle non minimal de produit $S^5 \times S^3 \times S^3$ et par suite de catègorie finie.
(iii) $dimIm(i^*) = 3$, et donc $dimIm(i^*) < \infty$.

Par contre, comme $\mathbb{Q}[x] \subset H^*(\Lambda U \otimes \Lambda(\overline{a}, \overline{u}, y), d)$, la catégorie rationnelle de E, $cat((\Lambda U \otimes \Lambda V), d)$, est infinie.

Question. Que se passe-t-il si nous supposons en outre que $\pi_*(\varphi) \otimes \mathbb{Q}$ est surjectif ?

3.5 Références

[D] N. Dupont (*Comunication privée.*)

[DGMS] P. Deligne, P. Griffiths, J. Morgan and D. sullivan. *The real homotopy theory of kähler manifolds*, Invent. math. 29 (1975), 245-254.

[El] M. El Haouari, *p-formalité des espaces*, Journal Pure. Appl. Algebra **78** (1992) 27-47.

[FHT_1] Y.Félix, S. Halperin and J-C. Thomas, *Elliptic Hopf algebras*, Journal London Math. Soc. **43** (1991) 545-555.

[FHT_2] Y. Félix, S. Halperin and J-C. Thomas. *Elliptic spaces*, Bulletin Amer. Math. Soc. **25** (1991) 69-73.

[FHT_3] Y. Félix, S. Halperin and J.C. Thomas, *Gorenstein spaces*. Adv. in. Math. **71** (1988) 92-112.

[FHT_4] Y. Félix, S. Halperin and J-C. Thomas. *The homotopy Lie algebra for finite complexes*, Publ. I.H.E.S. **56** (1983) 89-96.

[FT] Y.Félix and J-C. Thomas, *On the homology of Postnikov fibres*, Proc. Amer. Math. Soc. **118** (1993) 255-258.

[FM] Y. Félix and A. Murillo, *Gorenstein graded algebras and the evaluation map*, preprint, (1996)

[H] S. Halperin, *Universal enveloping algebra and loop space homology*, Journal Pure. Appl. Algebra **83** (1992) 237-282.

Chapitre 4. Espaces pur définis par la tour de Postnikov[3]

4.1 Introduction

Dans tout ce qui suit $\mathbb{Q}$ désigne le corps des rationnels, $\mathbb{F}_p$ le corps premier de caractéristique p; où p désigne un nombre premier et X un espace ayant le type d'homotopie d'un CW-complexe simplement connexe.

Dans le cas rationnel, la théorie de D. Sullivan [S] associe à tout espace X une algèbre différentielle graduée commutative (adgc en abrégé) $(\Lambda W, d)$ appelée modèle minimal de X, tel que $H^*(X;\mathbb{Q}) \cong H(\Lambda W, d)$ et $W \cong Hom(\pi_*(X);\mathbb{Q})$. D'autre part dans $[H_1]$ S. Halperin associe à une telle algèbre une autre algèbre graduée commutative libre sur le même espace vectoriel gradué W munie d'une différentielle d_σ dite *pure* définie de la façon suivante:

$$d_\sigma(W^{pair}) = 0 \quad et \quad (d - d_\sigma)(W^{impair}) \subset \Lambda^+ W^{impair} \otimes \Lambda W^{pair}.$$

Rappelons aussi que toute adgc A admet via la même théorie de Sullivan, une réalisation géomètrique notée $|A|$. L'espace ainsi défini par $(\Lambda W, d_\sigma)$ est appelé *espace pur* associé à X. La construction de $|A|$ est obtenue à l'aide de deux foncteurs, le premier étant celui de D. Sullivan qui associe à toute agdc un ensemble simplicial et le deuxième, dû à J. W. Milnor est celui permettant de construir un CW-complexe à partir d'un ensemble simplicial (cf. [F.H.T §17] pour plus de détails).

Dans le §2 de ce chapitre, partant de la tour de Postnikov de X, supposé rationnel, nous définissons une autre tour de Postnikov dont les n-étages sont notés $\tilde{X}_n$ $(n \geq 2)$. Notons $\tilde{X} = \varprojlim_n \{\tilde{X}_n\}$, notre premier résultat s'énonce alors:

Théorème 4.1.1 *Soit X un CW-complexe, rationnel, simplement connexe, alors l'espace $\tilde{X}$ est à homotopie près l'espace total de la fibration*

$$\Pi_n K(\pi_{2n+1}(X), 2n+1) \longrightarrow \tilde{X} \xrightarrow{p} \Pi_n K(\pi_{2n}(X), 2n).$$

Tel qu'il est construit, l'espace $\tilde{X}$ a pour modèle minimal $(\Lambda W, d_\sigma)$. Ceci résulte aussi de l'application du foncteur A_{PL} de Sullivan à la fibration précédente. Il s'en suit que $\tilde{X}$ est l'espace pur associé à X.

Signalons enfin que l'intéret dans l'etude d'un tel espace réside en particulier dans l'éxistence des deux suites spectrales suivantes (cf: $[H_1]$ et [R] réspectivement):

$$(s_1) \quad H((\Lambda V, d_\sigma) \Rightarrow H(\Lambda V, d))$$

$$(s_2) \quad \mathcal{E}xt_{(\Lambda V, d_\sigma)}(\mathbb{Q}, (\Lambda V, d_\sigma)) \Rightarrow \mathcal{E}xt_{(\Lambda V, d)}(\mathbb{Q}, (\Lambda V, d))$$

[3]En collaboration avec Mme El Adnani Nazha.

En utilisant (s_1), S. Halperin démontre que le caractère d'ellipticité de X est équivalent à celui de $\tilde{X}$. D'autre part (s_2) nous permet de reformuler le résultat essentiel dans [R]:

Théorème 4.1.2 *Soit X un espace r connexe et $\mathbb{Q}$ elliptique. Si $gldim(H_*(\Omega X, \mathbb{Q})) < \infty$, alors, les images des classes fondamentales de X et de $\tilde{X}$ dans les termes E_∞ de leurs suites spectarles de Milnor-Moore admettent un même représentant.*

Dans le cas non rationnel, toute adgc $(\Lambda W, d)$ sur le corps $\mathbb{F}_p$ possède aussi une structure pure $(\Lambda W, d_\sigma)$. D'autre part si $dim(X) < rp$ avec r désignant la connexitée de X, en utilisant le modèle d'Anick ([An]), S. Halperin associe dans [H_2] à un tel espace un modèle de Sullivan $(\Lambda W, d)$. Signalons aussi que l'équivalent des extensions de Hirsh n'est pas établit j'usqu'à présent. Toutefois en s'inspirant du cas rationnel, nous construisons un espace $\tilde{X}_{(p)}$ associé à $X_{(p)}$ (p localisé X) et nous montrons:

Théorème 4.1.3 *Soit X un CW-complexe, simplement connexe, alors l'espace $\tilde{X}_{(p)}$ est à homotopie près l'espace total de la fibration*

$$\Pi_n K(\pi_{2n+1}(X_{(p)}), 2n+1) \longrightarrow \tilde{X}_{(p)} \xrightarrow{p} \Pi_n K(\pi_{2n}(X_{(p)}), 2n).$$

$\tilde{X}_{(p)}$ est appelé espace *pur (mod p)* associé à X.

4.2 Espace rationnel pur

Dans tout ce §2 le corps de base est $\mathbb{Q}$. La notion du modèle minimal et son lien avec la tour de Postnikov de l'espace X sont rappelés au premier chapitre (pour plus de détails, se référer à [F,H,T] et [G,M]). Nous rappelons cependant dans ce qui suit les résultats principaux dans ce sens.

Definition 4.2.1 (i): Soit A une adgc sur le corps des rationnels $\mathbb{Q}$. Une extension de Hirsh de A est une adgc $(A \otimes \Lambda(V_k), d)$; où V_k est un espace vectoriel gradué homogène de degré k, de dimension finie et tel que $d(V_k) \subsetneq A^{k+1}$.

(ii): Deux extensions de Hirsh $(A \otimes \Lambda(V_k), d)$ et $(A \otimes \Lambda(V'_k), d')$ sont équivalentes si il existe un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} & & (A \otimes \Lambda V_k, d) \\ & \nearrow & \\ A & & \downarrow \varphi \\ & \searrow & \\ & & (A \otimes \Lambda(V'_k), d') \end{array}$$

avec φ un isomorphisme.

Notons que les classes d'équivalences définies par cette relation sont en correspondence biunivoque avec les classes $[d] \in H^{k+1}(A; V^\vee)$ et que la théorie d'obstruction permet de démontrer la correspondence biunivoque entre les extensions de Hirsh et les fibrations principales (cf. [G,M p.113] et [F-H-T. Part II] pour plus de détails).

Soient alors X un CW-complexe simplement connexe, $\{(X_n, p_n, k_n)\}$ sa tour de Postnikov et $\{(X'_n, p'_n, k'_n)\}$ le modèle simplicial de celle-ci, nous avons alors:

Théorème 4.2.2 *([G-M Th. 11.5]): Si $\mathcal{M}$ est un modèle minimal de X, alors,*

(i): $\mathcal{M}(n)$ est un modèle minimal de X'_n.

(ii): L'extension $\mathcal{M}(n) \subseteq \mathcal{M}(n+1)$ correspond à la fibration principale, $X'_{n+1} \longrightarrow X'_n$.

(iii): $Q\mathcal{M}(n+1)$ (ensemble des indécomposables de $\mathcal{M}(n+1)$) est isomorphe en tant qu'espace vectoriel gradué avec $Hom_{\mathbb{Z}}(\pi_{n+1}(X), \mathbb{Q})$.

(iv): Le k-invariant $k^{n+2} \in H^{n+2}(X_n, \pi_{n+1}(X))$ est tel que

$$(k^{n+2})^\vee \otimes \mathbb{Q} = d^{n+2} : Q\mathcal{M}(n+1) \longrightarrow H^{n+2}(\mathcal{M}(n)).$$

Plus explicitement chaque $p_n : X_n \longrightarrow X_{n-1}$ est une fibration principale de fibre $K(\pi_n(X), n)$, qui est le "pull back" de la fibration des chemins sur $K(\pi_n(X), n+1)$ par l'application $k^{n+1} : X_{n-1} \longrightarrow K(\pi_n(X), n+1)$ correspondente au k-invariant

$$k^{n+1} \in H^{n+1}(X_{n-1}, \pi_n(X)) \cong Hom(H_{n+1}(X_{n-1}), \pi_n(X)).$$

Ce k-invariant induit la différentielle du modèle minimal $\mathcal{M} = (\Lambda W, d)$ de X de la manière suivante:

Soit $d^{n+1} : Hom(\pi_{n+1}(X); \mathbb{Q}) \longrightarrow H^{n+2}(X_n; \mathbb{Q})$ l'application duale de $k^{n+2} \otimes \mathbb{Q}$. puisque $H^*(X_n, \mathbb{Q}) \cong H(\Lambda W^{\leq n}, d)$ et que $W^j \cong I^j$ (où I désigne dorénavant le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel gradué $Hom(\pi_*(X); \mathbb{Q})$), nous avons alors pour tout $x \in I^{n+1} = Hom(\pi_{n+1}(X); \mathbb{Q})$

$$d(x) = \omega \in \Lambda W^{\leq n} \iff d^{n+1}(x) = [\omega] \in H^{n+2}(X_n, \mathbb{Q}).$$

Construction d'une tour pure associée à une tour rationnelle

En utilisant les identifications précédentes, nous suggèrons que l'espace pur dont il est question dans l'introduction, doit être défini comme limite inverse d'une tour de Postnikov $\{\tilde{X}_n\}$ vérifiant les deux conditions suivantes:

$$(*) \qquad \tilde{d}^{2n} = 0$$

$$(**) \qquad \tilde{d}^{2n+1} : I^{2n+1} \longrightarrow \bigoplus_{2i_1+\ldots+2i_r=2n+2} I^{2i_1} \otimes I^{2i_2} \otimes \ldots. \otimes I^{2i_r}$$

où $I^{2i_k} = H^{2i_k}(K(\pi_{2i_k}(X), 2i_k)); \mathbb{Q})$ et $1 \leq i_k \leq n$.

Avant d'aborder la construction par récurrence sur n de $\{\tilde{X}_n\}$, rappelons que $H^*(K(\pi_n(X), n), \mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}[u_1, u_2, \dots u_m]$ avec $[u_j] \in H^n(K(\mathbb{Z}, \mathbb{Q})$ et m est tel que $\pi_n(X) \cong \mathbb{Z}^m$ ([G,M p:55]). Enfin d'après le théorème d'Hurewicz nous avons: $H^n(K(\pi_n(X), n), \mathbb{Q}) \cong I^n$.

Pour $n = 2$, soit $\tilde{X}_2 = X_2 = K(\pi_2(X), 2)$ et $d^3 : I^3 \longrightarrow H^4(X_2; \mathbb{Q})$ l'application induite par le k-invariant $k_2 \in H^4(X_2, \pi_3(X))$. Puisque $H^4(\tilde{X}_2, \mathbb{Q}) = H^4(K(\pi_2(X), 2), \mathbb{Q}) = I^2 \otimes I^2$, la condition (**) est vérifiée en prenant $\tilde{d}^3 = d^3 : I^3 \longrightarrow H^4(\tilde{X}_2, \mathbb{Q})$. d^3 induit alors $\tilde{k}^4 \otimes \mathbb{Q} : \tilde{X}_2 \longrightarrow K(\pi_3(X), 4)$ qui permet de définir $\tilde{X}_3$ comme espace totale de la fibration

$$K(\pi_3(X), 3) \longrightarrow \tilde{X}_3 \longrightarrow \tilde{X}_2$$

image resiproque de

$$K(\pi_3(X), 3) \longrightarrow E(K(\pi_3(X), 4)) \longrightarrow K(\pi_3(X), 4).$$

Tenant compte de la condition (*), nous posons:

$$\tilde{X}_4 = \tilde{X}_3 \times K(\pi_4(X), 4).$$

L'etape suivante est déterminée par l'application:

$$I^5 \longrightarrow H^6(\tilde{X}_4, \mathbb{Q}) = H^6(\tilde{X}_3 \times K(\pi_4(X), 4), \mathbb{Q}).$$

Mais d'après la formule de Kunneth,

$$\begin{aligned} H^6(\tilde{X}_3 \times K(\pi_4(X), 4), \mathbb{Q}) \cong\ & H^6(\tilde{X}_3, \mathbb{Q}) \otimes H^0(K(\pi_4(X), 4); \mathbb{Q}) \\ & \oplus H^2(\tilde{X}_3, \mathbb{Q}) \otimes H^4(K(\pi_4(X), 4); \mathbb{Q}). \end{aligned}$$

En utilisant ensuite la suite spectrale de Serre,

$$H^*(\tilde{X}_2, \mathbb{Q}) \otimes H^*(K(\pi_3(X), 3), \mathbb{Q}) \Longrightarrow H^*(\tilde{X}_3, \mathbb{Q}),$$

et l'isomorphisme $H^*(K(\pi_n(X), n), \mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}[u_1, u_2, \dots u_m]$, nous déduisons que $H^6(\tilde{X}_3, \mathbb{Q})$ est facteur direct de $H^6(K(\pi_3(X), 3); \mathbb{Q}) \oplus H^6(\tilde{X}_2, \mathbb{Q})$
$= I^3 \otimes I^3 \oplus I^2 \otimes I^2 \otimes I^2$. De même $H^2(\tilde{X}_3, \mathbb{Q}) \cong H^2(\tilde{X}_2, \mathbb{Q}) = I^2$.

En tenant compte cette fois ci de la condition (**), nous définissons

$$\tilde{d}^5 : I^5 \longrightarrow H^6(\tilde{X}_4, \mathbb{Q}).$$

comme étant la composée des applications

$$I^5 \longrightarrow (I^2 \otimes I^2 \otimes I^2) \oplus (I^2 \otimes I^4) \hookrightarrow H^6(\tilde{X}_4, \mathbb{Q}).$$

L'application $\tilde{k}^5 : \tilde{X}_4 \longrightarrow K(\pi_5(X), 6)$ définie ensuite $\tilde{X}_5$ comme espace total de la fibration image reciproque de la fibration universelle sur $K(\pi_5(X), 6)$.

Ensuite, nous posons

$$\tilde{X}_6 = \tilde{X}_5 \times K(\pi_6(X), 6).$$

Supposons maintenant que $\tilde{d}^{2k-1}$ et $\tilde{X}_{2k} = \tilde{X}_{2k-1} \times K(\pi_{2k}(X), 2k)$ sont définis.

Pour obtenir $\tilde{d}^{2k+1}$ nous devons procéder à partir de l'application

$$I^{2k+1} \longrightarrow H^{2k+2}(\tilde{X}_{2k}, \mathbb{Q}) = H^{2k+2}(\tilde{X}_{2k-1} \times K(\pi_{2k}(X), 2k); \mathbb{Q}).$$

Puisque $H^{2k+2}(\tilde{X}_{2k-1} \times K(\pi_{2k}(X), 2k); \mathbb{Q}) \cong H^{2k+2}(\tilde{X}_{2k-1}; \mathbb{Q}) \oplus H^2(\tilde{X}_{2k-1}; \mathbb{Q}) \otimes I^{2k}$ nous sommes ammener à scinder $H^{2k+2}(\tilde{X}_{2k-1}; \mathbb{Q})$ en utilisant la fibration de Serre

$$H^*(\tilde{X}_{2k-2}; \mathbb{Q}) \otimes H^*(K(\pi_{2k-1}(X), 2k-1); \mathbb{Q}) \Longrightarrow H^*(\tilde{X}_{2k-1}; \mathbb{Q}).$$

La considération de (**), nous permet de considérer seulement les classes de cohomologie prevenant de $H^{2k+2}(\tilde{X}_{2k-2}; \mathbb{Q})$.

De nouveau, puisque $\tilde{X}_{2k-2} = \tilde{X}_{2k-3} \times K(\pi_{2k-2}(X), 2k-2)$ et par suite $H^{2k+2}(\tilde{X}_{2k-2}; \mathbb{Q}) = H^{2k+2}(\tilde{X}_{2k-3}; \mathbb{Q}) \oplus H^4(\tilde{X}_{2k-3}; \mathbb{Q}) \otimes I^{2k-2}$. Nous devons donc utiliser la suite spectrale

$$H^*(\tilde{X}_{2k-4}; \mathbb{Q}) \otimes H^*(K(\pi_{2k-3}(X), 2k-3); \mathbb{Q}) \Longrightarrow H^*(\tilde{X}_{2k-3}; \mathbb{Q}),$$

pour sciender $H^{2k+2}(\tilde{X}_{2k-3}; \mathbb{Q})$ d'une part et $H^4(\tilde{X}_{2k-3}; \mathbb{Q})$ d'autre part. Ainsi de suite, ce procédé de scindage nous conduit enfin à une application de type

$$\tilde{d}^{2k+1} : I^{2k+1} \longrightarrow H^{2k+2}(\tilde{X}_{2k}; \mathbb{Q})$$

qui est en fait la composée des applications

$$\tilde{d}^{2k-1} : I^{2k+1} \longrightarrow \bigoplus_{2i_1+\ldots+2i_r=2k+2} I^{2i_1} \otimes I^{2i_2} \otimes \ldots \otimes I^{2i_r} \hookrightarrow H^{2k+2}(\tilde{X}_{2k}; \mathbb{Q});$$

où $I^{2i_l} = H^{2i_l}(K(\pi_{2i_l}(X), 2i_l)); \mathbb{Q})$ et $1 \leq i_l \leq k$.

Ceci termine la récurence.

Remarque 4.2.3 Si X est un CW-complexe de dimension finie, ce procédé est formellement términé au rang $N = dim(X)$ dans le sens que les étages d'ordres supérieurs sont obtenus dés que $\tilde{X}_N$ est construit (cf. [G-M] §VII remark (3)).

Considérons maintenant l'espace $\tilde{X} = \varprojlim_n \{\tilde{X}_n\}$. C'est un sous espace de $\Pi_n \tilde{X}_n$. Remarquons ensuite que puisque $\tilde{X}_{2n} = \tilde{X}_{2n-1} \times K(\pi_{2n}(X), 2n)$ nous avons l'application:

$$p : \tilde{X} \longrightarrow \Pi_n K(\pi_{2n}(X), 2n)$$

qui n'est autre que la composition de l'inclusion $\tilde{X} \hookrightarrow \Pi_n \tilde{X}_n$ et de la projection $\Pi_n \tilde{X}_n \longrightarrow \Pi_n K(\pi_{2n}(X), 2n)$. Notons F_p la fibre homotopique de l'application p, nous avons alors une fibration de Serre que nous notons abusivement

$$F_p \longrightarrow \tilde{X} \longrightarrow \Pi_n K(\pi_{2n}(X), 2n).$$

Nous sommes enfin en mesure d'énoncer le premier résultat essentiel de cette note.

Théorème 4.2.4 *Soit X un CW-complexe, rationnel, simplement connexe et de dimension finie , alors l'espace $\tilde{X}$ défini précédemment est à homotopie près l'espace totale de la fibration*

$$\Pi_n K(\pi_{2n+1}(X), 2n+1) \longrightarrow \tilde{X} \xrightarrow{p} \Pi_n K(\pi_{2n}(X), 2n).$$

Preuve: Rappelons tout d'abord que dans la fibration

$$F_p \longrightarrow \tilde{X} \longrightarrow \Pi_n K(\pi_{2n}(X), 2n),$$

$\tilde{X}$ remplace le produit fibré $\tilde{X} \times_{\Pi_n K(\pi_{2n}(X),2n)} M(\Pi_n K(\pi_{2n}(X), 2n))$ et p désigne la projection p_1 de ce dernier sur $\Pi_n K(\pi_{2n}(X), 2n)$ laquelle à tout chemin f fait correspondre son extrimitée (cf. [F-H-T, §]).

La construction de $\tilde{X}$ entraîne que pour tout $i \geq 0$, $\pi_i(\tilde{X}) = \pi_i(X)$ et nous déduisons donc facilement de la suite exacte d'homotopie

$$\ldots \pi_i(F_p) \longrightarrow \pi_i(\tilde{X}) \longrightarrow \pi_i(\Pi_n K(\pi_{2n}(X), 2n)) \longrightarrow \pi_{i-1}(F_p) \longrightarrow \ldots,$$

que les groupes d'homotopies de F_p sont donnés par:

$$(\chi): \ \pi_k(F_p) = \begin{cases} 0 & \text{si } k = 2n, \\ \pi_{2n+1}(X) & \text{si } k = 2n+1. \end{cases}$$

D'autre part chaque $\tilde{X}_{2n+1}$ étant l'espace total de la fibration

$$K(\pi_{2n+1}(X), 2n+1) \longrightarrow \tilde{X}_{2n+1} \longrightarrow \tilde{X}_{2n},$$

nous déduisons que $\Pi_n K(\pi_{2n+1}(X), 2n+1)$ considéré comme sous espace de $\tilde{X}$ est envoyé par p au point de base. Ceci entraine que $\Pi_n K(\pi_{2n+1}(X), 2n+1) \subseteq F_p$ et comme consequence à (χ) nous avons en fait

$$F_p = \Pi_n K(\pi_{2n+1}(X), 2n+1). \quad \diamond$$

Considérons maintenant la tour de Postnikov $\{\tilde{X}_n, \tilde{p}_n, \tilde{k}_n\}$. D'après le théorème 2.7, le modéle minimal associé à celle-ci n'est autre que $(\Lambda W, d_\sigma)$. Il en resulte:

Corollaire 4.2.5 *A une équivalence d'homotopie près, $\tilde{X}$ est la réalisation géométrique du modéle $(\Lambda W, d_\sigma)$.*

Remarque 4.2.6 En appliquant le foncteur de Sullivan A_{PL} à la fibration

$$\Pi_n K(\pi_{2n+1}(X), 2n+1) \longrightarrow \tilde{X} \xrightarrow{p} \Pi_n K(\pi_{2n}(X), 2n),$$

nous retrouvons que le modéle minimal de $\tilde{X}$ a une structure pure, ainsi la différentielle d_σ est étroitement liée à la fibration p.

4.3 Espace pur (mod p)

Dans cette section nous nous interessons au p-localisé $X_{(p)}$ de X, où p désigne un nombre premier. Le but est de construire une tour de Postnikov relèvante de celle de $X_{(p)}$ telle que l'espace limite inverse qui en découle vérifie un théorème similaire au précédent. Dans ce cas les ingrédiants essentiels dans le processuce de scindage sont les $H^*(K(\mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z},n);\mathbb{F}_p)$; $s \geq 0$. En effet, puisque les groupes $\pi_n(X_{(p)})$ sont finiment engendrés et si G et G' sont deux groupes abeliens, $K(G \times G', m) \sim K(G,m) \times K(G',m)$, les générateurs de chaque $H^*(K(\pi_n(X_{(p)}),n);\mathbb{F}_p)$ s'expriment en fonction de ceux des $H^*(K(\mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z}),n);\mathbb{F}_p)$; $s \geq 0$ dont la structure est donnée par le théorème de Cartan-Serre suivant:

Théorème 4.3.1 *([Mc. Th. 6.12]): Pour $n \geq 0$ et p un nombre premier,*
$H^*(K(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z},n);\mathbb{F}_p)$ est une algèbre graduée commutative libre sur les générateurs $St^J u_n$ où $u_n \in H^n(K(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z},n);\mathbb{F}_p)$ désigne la classe fondamentale et J une suite admissible telle que $e(J) \leq n$.
$H^*(K(\mathbb{Z},n);\mathbb{F}_p)$ est une algèbre graduée commutative libre sur les généra teurs $St^J u_n$ où $u_n \in H^n(K(\mathbb{Z},n);\mathbb{F}_p)$ et $J = (a_1, a_2, \ldots a_m)$ une suite admissible telle que $e(J) \leq n$ et a_m soit pair.
$H^*(K(\mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z},n);\mathbb{F}_p)$ est une algèbre graduée commutative libre sur les générateurs $St^J u_n$ et $St^J \beta_s u_n$ où $u_n \in H^n(K(\mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z},n);\mathbb{F}_p)$, β_s désigne la k^{eme} operation de Bokstien et $J = (a_1, a_2, \ldots a_m)$ une suite admissible telle que $e(J) \leq n$ et a_m soit pair.

Parmi les autres ingrédiants utilisés dans la construction de $\tilde{X}$ dans le cas rationnel, l'existence d'un modèle miniml de Sullivan $(\Lambda W, d)$ de X et la correspondence entre les extensions de Hirsh et les fibrations principales formant la tour de Postnikov de X. Si $dim(X) < rp$ avec r désignant la connexitée de X, d'après ($[H_2, Th.10.1]$), $X_{(p)}$ possède un modèle minimal $(\Lambda W, d)$. Toutefois l'équivalent des extensions de Hirsh dans ce cas n'est pas encors établit. Mais en s'inspirant du cas précédent, les k-invariants de la tour de Postnikov de l'espace $\tilde{X}_{(p)}$ doivent résulter de conditions similaires aux précédentes. La seule modification majeure dans (**) est dû à la différences des structures des groupes $H^*(K(\mathbb{Z},n);\mathbb{Q})$ d'une part et $H^*(K(\mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z},n);\mathbb{F}_p)$ ($s \geq 0$)d'autre part. Nous exigeons alors dans ce cas:

(*)
$$\tilde{d}^{2n} = 0$$

(**)
$$\tilde{d}^{2n+1} : I^{2n+1} \longrightarrow \bigoplus_{\substack{\sum i = 2n+2-\sum i_j \\ i + i_j \text{est pair}}} \bigotimes_{\substack{2 \leq i \leq 2n \\ 1 \leq j \leq m_i}} I^{i,i_j}$$

avec $I^{i,i_j} = H^{i+i_j}(K(\pi_i(X),i));\mathbb{F}_p)$ ($2 \leq i \leq 2n$ pour des raisons de minimalité).

Notons aussi $I^n = H^n(K(\pi_n(X),n));\mathbb{F}_p) = Hom(\pi_n(X_{(p)});\mathbb{F}_p)$. En utilisant la dualité entre les k-invariants $k^{n+2} \otimes \mathbb{F}_p$ dans la tour de Postnikov de $X_{(p)}$ est les morphismes $d^{n+1} : Hom(\pi_{n+1}(X); \mathbb{F}_p) \longrightarrow H^{n+2}(X_n, \mathbb{F}_p)$. $\tilde{X}_{(p)}$ est construit de la même façon que précédemment pourvue que nous puissions scinder les $H^{n+2}(\tilde{X}_n, \mathbb{F}_p)$ à l'aide des fibrations de Serre.

La condition (*) nous contraint de prendre:

$$\tilde{X}_{(p)_{2k}} = \tilde{X}_{(p)_{2k-1}} \times K(\pi_{2k}(X)_{(p)}, 2k).$$

Ceci étant, supposons que $\tilde{d}^{2k-1}$ et $\tilde{X}_{(p)_{2k}}$ sont définis. En reprenant le procédé de scindage similaire à celui du cas rationnel, nous prenons pour applicattion

$$\tilde{d}^{2k+1} : I^{2k+1} \longrightarrow H^{2k+2}(\tilde{X}_{2k}; \mathbb{F}_p)$$

la composée de deux applications. La première étant:

$$I^{2k+1} \longrightarrow \bigoplus_{\substack{\sum i = 2k+2-\sum i_j \\ i+i_j \text{est pair}}} \bigotimes_{\substack{2 \leq i \leq 2k \\ 1 \leq j \leq m_i}} I^{i,i_j}$$

avec $I^{i,i_j} = H^{i+i_j}(K(\pi_i(X), i)); \mathbb{F}_p)$ les indices i_j correspondent alors aux générateurs $St^J u_i$ qui intervienent grâce au théorème précédent et tels que $i + i_j$ soit pair). La seconde est l'inclusion

$$\bigoplus_{\substack{\sum i = 2k+2-\sum i_j \\ i+i_j \text{est pair}}} \bigotimes_{\substack{2 \leq i \leq 2k \\ 1 \leq j \leq m_i}} I^{i,i_j} \hookrightarrow H^{2k+2}(\tilde{X}_{2k}; \mathbb{F}_p).$$

$\tilde{X}_{(p)_{2k+1}}$ est par conséquent l'espace total de la fibration

$$K(\pi_{2k+1}(X_{(p)}), 2k+1) \longrightarrow \tilde{X}_{(p)_{2k-1}} \longrightarrow \tilde{X}_{(p)_{2k}}$$

induite par $\tilde{d}^{2k+1}$. Pour conclure posons $\tilde{X}_{(p)} = \varprojlim_n \{\tilde{X}_{(p)_n}\}$, il résulte alors de ce qui précéde, le théorème suivant similaire au précédent.

Théorème 4.3.2 *Soit X un CW-complexe, simplement connexe et de dimension finie, alors l'espace $\tilde{X}_{(p)}$ défini précédemment est à homotopie près l'espace totale de la fibration*

$$\Pi_n K(\pi_{2n+1}(X_{(p)}), 2n+1) \longrightarrow \tilde{X}_{(p)} \xrightarrow{p} \Pi_n K(\pi_{2n}(X_{(p)}), 2n).$$

Nous pouvons donc d'une façon similaire poser

Definition 4.3.3 L'espace $\tilde{X}_{(p)}$ est appelé *espace pur (mod p)* associé à X.

4.4 Références:

[A] D. Anick, *Hopf algebras up to homotopy* , J. Amer. Math. Soc. 2 (1989) 417-453.

[F,H,T] Y. Félix, S. Halperin and J. C. Thomas, *Rational Homotopy Theory*, Preprint Université d'Angers (1997).

[G,M] P. A. Griffiths and J. W. Morgan, *Rational Homotopy theory and Differential Forms* Birkhäuser, 1981.

[H_1] S. Halperin, *Finiteness in the minimal models of Sullivan*, Trans. Amer. Math. Soc. 230 (1977), 173-199.

[H_2] S. Halperin, *Universal enveloping algebras and loop space homology*, J. Pure Appl. Algebra 83 (1992) 237-282.

[M] J. McCleary, *User's Guide To Spectral Sequences*, Publish or Perish, Qnc. MLS 12, 1985.

[R] Y. Rami, *Dimension globale et classe fondamentale d'un espace*, Ann. Inst. Fourier 49, Fac. 1, (1999) 1-18.

[S] D. Sullivan, *Infinitesimal computations in topology*, Inst. Hautes. Études Sci. Publ. Math. 47 (1978), 269-331.

ANNÉE: 1999
DOCTORAT D'ÉTAT

NUMÉRO D'ORDRE

Titre de la thèse:

Sur l'algèbre de Pontryagin
de certains espaces à dualité de Poincarré

Nom et Prénom: RAMI Youssef

Spécialité: TOPLOGIE ALGÉBRIQUE

Résumé:

La première partie de ce travail est consacrée à l'étude des espaces simplement connexes situés dans le domaine d'Anick. En se basant sur l'agèbre de Pontryagin muni de sa structure de Hopf, nous généralisons certains résultats connus dans le cas rationnel et donnons plusieurs caractérisations de tels espaces suposés elliptiques et à series de Hilbert-Poincarré de type polynômiale. D'autre part, nous introduisons la suite spectrale impaire $\mathcal{E}xt - version$ et nous l'utilisons pour expliciter une relation entre la classe fondamentale, exprimée en terme du modèle minimal, d'un tel espace et celle de pur associé à ce modèle.

Dans la deuxième partie, nous apportons des réponses affirmatives à la conjecture de l'omnibus pour les espaces p-formels lorsque $p \neq 2$ et pour les espaces rationnellement quasi-finis. Nous exhibons d'autre part la différence de comportement des localisés de certaines fibrations.

Enfin dans la dernière partie, en exploitons les relations entre le modèle minimal d'un espace et la tour de Postnikov de son rationnalisé, nous obtenons une réalisation géomètrique explicite du moèle pur associé. Celle-ci est homotopiquement équivalente à celle de D. Sullivan et en plus elle est donnée comme espace total d'une fibration particulière. En s'inspirant du cas rationnel, nous associons à tout espace (1-connexe), un autre espace, appelé espace pur mod (p) et nous montrons un théorème p-localement analogue au précédent.

MOTS CLEFS:
Espaces à dualité de Poincarré, Algèbre de Pontryagin, Série de Hilbert-Poincarré, Modèle de Sullivan, Espace pur, Espace p-formel, Espace rationnellement quasi-fini, Réalisation géométrique, Tour de Postnikov.