Attracteur et complexité

Rencontre: géométrie ,topologie, physique et mathématiques

Nadir Maaroufi

Univ internationale de Rabat

Rabat les 2-3 juin 2012

- Introduction

- Introduction

- Dimension et ε-entropie

- Introduction
- Dimension et ε-entropie
- Résultat et idées de la preuve

Introduction

Ginzburg-Landau complexe sur $\mathbb{R}$ et théorie des systèmes dynamiques

Instabilités hydrodynamiques, transitions de phase, supraconductivité, superfluidité...

Ginzburg-Landau complexe sur $\mathbb{R}$ et théorie des systèmes dynamiques

Instabilités hydrodynamiques, transitions de phase, supraconductivité, superfluidité... EDP d'évolution CGL : $x \in \mathbb{R}$, $u(t,x) \in \mathbb{C}$

$$\partial_t u = (1 + i\alpha)\triangle u + u - (1 + i\beta)u|u|^2. \tag{1}$$

Ginzburg-Landau complexe sur $\mathbb{R}$ et théorie des systèmes dynamiques

Instabilités hydrodynamiques, transitions de phase, supraconductivité, superfluidité... EDP d'évolution CGL : $x \in \mathbb{R}$, $u(t,x) \in \mathbb{C}$

$$\partial_t u = (1+i\alpha)\triangle u + u - (1+i\beta)u|u|^2. \tag{1}$$

L'équation (1) est invariante par translation.

Ginzburg-Landau complexe sur $\mathbb{R}$ et théorie des systèmes dynamiques

Instabilités hydrodynamiques, transitions de phase, supraconductivité, superfluidité... EDP d'évolution CGL : $x \in \mathbb{R}$, $u(t,x) \in \mathbb{C}$

$$\partial_t u = (1+i\alpha)\triangle u + u - (1+i\beta)u|u|^2. \tag{1}$$

L'équation (1) est invariante par translation.
Un triplet (E, T, S), E un espace d'état, T le domaine temporel et $S : E \times T \longrightarrow E$ une fonction de transition d'état.

Ginzburg-Landau complexe sur $\mathbb{R}$ et théorie des systèmes dynamiques

Instabilités hydrodynamiques, transitions de phase, supraconductivité, superfluidité... EDP d'évolution CGL : $x \in \mathbb{R}$, $u(t,x) \in \mathbb{C}$

$$\partial_t u = (1 + i\alpha)\triangle u + u - (1 + i\beta)u|u|^2. \tag{1}$$

L'équation (1) est invariante par translation.
Un triplet (E, T, S), E un espace d'état, T le domaine temporel et $S : E \times T \longrightarrow E$ une fonction de transition d'état. $u(t = 0, x) = u_0(x)$,

Ginzburg-Landau complexe sur $\mathbb{R}$ et théorie des systèmes dynamiques

Instabilités hydrodynamiques, transitions de phase, supraconductivité, superfluidité... EDP d'évolution CGL : $x \in \mathbb{R}$, $u(t,x) \in \mathbb{C}$

$$\partial_t u = (1+i\alpha)\triangle u + u - (1+i\beta)u|u|^2. \tag{1}$$

L'équation (1) est invariante par translation.
Un triplet (E, T, S), E un espace d'état, T le domaine temporel et $S : E \times T \longrightarrow E$ une fonction de transition d'état. $u(t=0,x) = u_0(x)$,

$$\left\{ \begin{array}{rcl} S(t)(u_0) & = & u(t) \\ S(0)(u_0) & = & u_0 \\ S(t_2)(S(t_1)u_0) & = & S(t_1+t_2)(u_0) = u(t_1+t_2) \end{array} \right.$$

Ginzburg-Landau complexe sur $\mathbb{R}$ et théorie des systèmes dynamiques

Instabilités hydrodynamiques, transitions de phase, supraconductivité, superfluidité... EDP d'évolution CGL : $x \in \mathbb{R}$, $u(t,x) \in \mathbb{C}$

$$\partial_t u = (1 + i\alpha)\triangle u + u - (1 + i\beta)u|u|^2. \tag{1}$$

L'équation (1) est invariante par translation.
Un triplet (E, T, S), E un espace d'état, T le domaine temporel et $S : E \times T \longrightarrow E$ une fonction de transition d'état. $u(t = 0, x) = u_0(x)$,

$$\begin{cases} S(t)(u_0) & = & u(t) \\ S(0)(u_0) & = & u_0 \\ S(t_2)(S(t_1)u_0) & = & S(t_1 + t_2)(u_0) = u(t_1 + t_2) \end{cases}$$

- A partir d'un vecteur de conditions initiales u_0, la fonction $S(t)$ permet de définir l'état du système à tout instant.

Problème de Cauchy et espaces fonctionnels

Problème de Cauchy et espaces fonctionnels

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dfrac{\partial u}{\partial t} & = & (1+i\alpha)\triangle u + u - (1+i\beta)u|u|^2 \\ u(t=0) & = & u_0, \qquad u_0 \in E. \end{array} \right.$$

Problème de Cauchy et espaces fonctionnels

$$\left\{\begin{array}{rcl}\dfrac{\partial u}{\partial t} & = & (1+i\alpha)\triangle u + u - (1+i\beta)u|u|^2 \\ u(t=0) & = & u_0, \qquad u_0 \in E.\end{array}\right.$$

Existence,

Problème de Cauchy et espaces fonctionnels

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dfrac{\partial u}{\partial t} & = & (1 + i\alpha)\triangle u + u - (1 + i\beta)u|u|^2 \\ u(t = 0) & = & u_0, \qquad u_0 \in E. \end{array} \right.$$

Existence,unicité des solutions et

Problème de Cauchy et espaces fonctionnels

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{\partial u}{\partial t} & = & (1+i\alpha)\triangle u + u - (1+i\beta)u|u|^2 \\ u(t=0) & = & u_0, \qquad u_0 \in E. \end{array}\right.$$

Existence,unicité des solutions et stabilité par rapport à la C.I

Problème de Cauchy et espaces fonctionnels

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{\partial u}{\partial t} & = & (1+i\alpha)\triangle u + u - (1+i\beta)u|u|^2 \\ u(t=0) & = & u_0, \qquad u_0 \in E. \end{array}\right.$$

Existence,unicité des solutions et stabilité par rapport à la C.I

$$u_0 \to u(t) \text{ continue.}$$

Problème de Cauchy et espaces fonctionnels

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} & = & (1+i\alpha)\triangle u + u - (1+i\beta)u|u|^2 \\ u(t=0) & = & u_0, \qquad u_0 \in E. \end{cases}$$

Existence,unicité des solutions et stabilité par rapport à la C.I

$$u_0 \to u(t) \text{ continue.}$$

- $H^1_\rho = \{u/\|u\|^2_{H^1_\rho} = \int_{\mathbb{R}} \rho(|u|^2 + |u'|^2)dx < \infty\}.$

Problème de Cauchy et espaces fonctionnels

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} & = & (1+i\alpha)\triangle u + u - (1+i\beta)u|u|^2 \\ u(t=0) & = & u_0, \qquad u_0 \in E. \end{cases}$$

Existence,unicité des solutions et stabilité par rapport à la C.I

$$u_0 \to u(t) \text{ continue.}$$

- $H^1_\rho = \{u / \|u\|^2_{H^1_\rho} = \int_{\mathbb{R}} \rho(|u|^2 + |u'|^2)dx < \infty\}$.
- Opérateur de translation $T_y : u \to u(.+y)$. Espace des fonctions uniformément locales

$$H^1_{l,u} = \{u \in H^1_\rho / \|u\|_{H^1_{l,u}} = \sup_{y\in\mathbb{R}} \|T_y u\|_{H^1_\rho} < \infty, \|T_y u - u\|_{H^1_{l,u}} \underbrace{\to}_{y\to 0} 0\}.$$

Problème de Cauchy et espaces fonctionnels

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} &= (1+i\alpha)\triangle u + u - (1+i\beta)u|u|^2 \\ u(t=0) &= u_0, \qquad u_0 \in E. \end{cases}$$

Existence,unicité des solutions et stabilité par rapport à la C.I

$$u_0 \to u(t) \text{ continue.}$$

- $H^1_\rho = \{u / \|u\|^2_{H^1_\rho} = \int_{\mathbb{R}} \rho(|u|^2 + |u'|^2)dx < \infty\}$.
- Opérateur de translation $T_y : u \to u(.+y)$. Espace des fonctions uniformément locales

$$H^1_{l,u} = \{u \in H^1_\rho / \|u\|_{H^1_{l,u}} = \sup_{y\in\mathbb{R}} \|T_y u\|_{H^1_\rho} < \infty, \|T_y u - u\|_{H^1_{l,u}} \underbrace{\to}_{v\to 0} 0\}.$$

Théorème (Mielke, Schneider. 1995)

Problème de Cauchy pour CGL est bien posé dans $H^1_{l,u}$ + effet régularisant :

Problème de Cauchy et espaces fonctionnels

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} & = & (1+i\alpha)\triangle u + u - (1+i\beta)u|u|^2 \\ u(t=0) & = & u_0, \qquad u_0 \in E. \end{cases}$$

Existence,unicité des solutions et stabilité par rapport à la C.I

$$u_0 \to u(t) \text{ continue.}$$

- $H^1_\rho = \{u / \|u\|^2_{H^1_\rho} = \int_{\mathbb{R}} \rho(|u|^2 + |u'|^2)dx < \infty\}$.
- Opérateur de translation $T_y : u \to u(.+y)$. Espace des fonctions uniformément locales

$H^1_{l,u} = \{u \in H^1_\rho / \|u\|_{H^1_{l,u}} = \sup_{y\in\mathbb{R}} \|T_y u\|_{H^1_\rho} < \infty, \|T_y u - u\|_{H^1_{l,u}} \underbrace{\to}_{y\to 0} 0\}$.

Théorème (Mielke, Schneider. 1995)

Problème de Cauchy pour CGL est bien posé dans $H^1_{l,u}$ + effet régularisant :$S(t)$ envoie tout borné $B \subset H^1_{l,u}$ dans un borné de $H^n_{l,u}$.

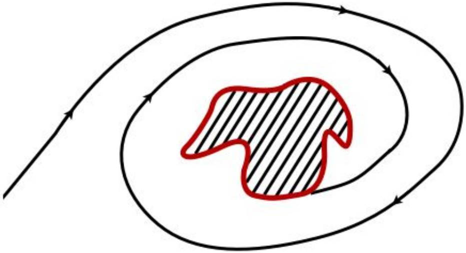
Systèmes dynamiques dissipatifs et attracteurs

Systèmes dynamiques dissipatifs et attracteurs

Un système est *dissipatif* si il 'consommation de l'énergie' au cours du temps, par opposition à un système *conservatif* qui lui garantit la constance de l'énergie à travers le temps.

Systèmes dynamiques dissipatifs et attracteurs

Un système est *dissipatif* si il 'consommation de l'énergie' au cours du temps, par opposition à un système *conservatif* qui lui garantit la constance de l'énergie à travers le temps.



$\mathcal{A}$

Définition (années 70)

Un sous-ensemble $\mathcal{A}$ de E est appelé attracteur global pour $S(t)$, si il vérifie les propriétés suivantes.

- *$\mathcal{A}$ est compact.*
- *$S(t)\mathcal{A} = \mathcal{A}$ pour tout $t > 0$ (invariance).*
- *$\forall$ borné B inclus dans E est attiré dans $\mathcal{A}$ pour la distance E, i.e.* $dist_E(S(t)(B), \mathcal{A}) := \sup_{b\in B} \inf_{a\in\mathcal{A}} \|S(t)(b) - a\|_E \to 0$ *quand* $t \to \infty$.

Définition (Feireisl, Laurençot, Simondon. 1994)

Un sous-ensemble $\mathcal{A}$ de E est appelé (E, E_ρ)-attracteur global pour $S(t)$, si il vérifie les propriétés suivantes.

- *$\mathcal{A}$ est compact.*
- *$S(t)\mathcal{A} = \mathcal{A}$ pour tout $t > 0$ (invariance).*
- *$\forall$ borné B inclus dans E est attiré dans $\mathcal{A}$ pour la distance E , i.e.* $dist_E(S(t)(B), \mathcal{A}) := \sup_{b\in B} \inf_{a\in\mathcal{A}} \|S(t)(b) - a\|_E \to 0 \quad quand \quad t \to \infty$.

Définition (Feireisl, Laurençot, Simondon. 1994)

Un sous-ensemble $\mathcal{A}$ de E est appelé (E, E_ρ)-attracteur global pour $S(t)$, si il vérifie les propriétés suivantes.

- *$\mathcal{A}$ fermé, borné dans E, et compact dans E_ρ.*
- *$S(t)\mathcal{A} = \mathcal{A}$ pour tout $t > 0$ (invariance).*
- *$\forall$ borné B inclus dans E est attiré dans $\mathcal{A}$ pour la distance E , i.e. $dist_E(S(t)(B), \mathcal{A}) := \sup_{b \in B} \inf_{a \in \mathcal{A}} \|S(t)(b) - a\|_E \to 0 \quad quand \quad t \to \infty$.*

Définition (Feireisl, Laurençot, Simondon. 1994)

Un sous-ensemble $\mathcal{A}$ de E est appelé (E, E_ρ)-attracteur global pour $S(t)$, si il vérifie les propriétés suivantes.

- *$\mathcal{A}$ fermé, borné dans E, et compact dans E_ρ.*
- *$S(t)\mathcal{A} = \mathcal{A}$ pour tout $t > 0$ (invariance).*
- *$\forall$ borné B inclus dans E est attiré dans $\mathcal{A}$ pour la distance E_ρ, i.e. $dist_{E_\rho}(S(t)(B), \mathcal{A}) := \sup_{b \in B} \inf_{a \in \mathcal{A}} \|S(t)(b) - a\|_{E_\rho} \to 0$ quand $t \to \infty$.*

Définition (Feireisl, Laurençot, Simondon. 1994)

Un sous-ensemble $\mathcal{A}$ de E est appelé (E, E_ρ)-attracteur global pour $S(t)$, si il vérifie les propriétés suivantes.

- *$\mathcal{A}$ fermé, borné dans E, et compact dans E_ρ.*
- *$S(t)\mathcal{A} = \mathcal{A}$ pour tout $t > 0$ (invariance).*
- *$\forall$ borné B inclus dans E est attiré dans $\mathcal{A}$ pour la distance E_ρ, i.e. $dist_{E_\rho}(S(t)(B), \mathcal{A}) := \sup_{b \in B} \inf_{a \in \mathcal{A}} \|S(t)(b) - a\|_{E_\rho} \to 0$ quand $t \to \infty$.*

Théorème (Mielke, Schneider. 1995)

L'équation (1) possède un $(H^1_{l,u}, H^1_\rho)$-attracteur global $\mathcal{A}$ qui est invariant par translation.

Dimension et ε-entropie

Cas d'un domaine borné ($x \in [-L, L]$)

Cas d'un domaine borné ($x \in [-L, L]$)

Définition (années 20)

Soit K un ensemble compact et $N_\varepsilon(K)$ le nombre de boules de rayon ε, nécessaires pour recouvrir K. La dimension fractale de K est

$$dim_F K := \limsup_{\varepsilon \to 0} \frac{\log(N_\varepsilon(K))}{\log(\frac{1}{\varepsilon})}$$

Cas d'un domaine borné ($x \in [-L, L]$)

Définition (années 20)

Soit K un ensemble compact et $N_\varepsilon(K)$ le nombre de boules de rayon ε, nécessaires pour recouvrir K. La dimension fractale de K est

$$dim_F K := \limsup_{\varepsilon \to 0} \frac{\log(N_\varepsilon(K))}{\log(\frac{1}{\varepsilon})}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} & = & (1+i\alpha)\triangle u + u - (1+i\beta)u|u|^2 \\ u(t=0) & = & u_0, \qquad u_0 \in L^2_{per}(-L, L). \end{cases} \tag{2}$$

Cas d'un domaine borné ($x \in [-L, L]$)

Définition (années 20)

Soit K un ensemble compact et $N_\varepsilon(K)$ le nombre de boules de rayon ε, nécessaires pour recouvrir K. La dimension fractale de K est

$$dim_F K := \limsup_{\varepsilon \to 0} \frac{\log(N_\varepsilon(K))}{\log(\frac{1}{\varepsilon})}$$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dfrac{\partial u}{\partial t} & = & (1+i\alpha)\triangle u + u - (1+i\beta)u|u|^2 \\ u(t=0) & = & u_0, \qquad u_0 \in L^2_{per}(-L, L). \end{array} \right. \tag{2}$$

Théorème (Ghidaglia, Héron. 1987)

Le problème de Cauchy pour (2) est bien posé. L'équation (2) possède un attracteur global $\mathcal{A}^0_{L,per}$.

Cas d'un domaine borné ($x \in [-L, L]$)

Définition (années 20)

Soit K un ensemble compact et $N_\varepsilon(K)$ le nombre de boules de rayon ε, nécessaires pour recouvrir K. La dimension fractale de K est

$$dim_F K := \limsup_{\varepsilon \to 0} \frac{\log(N_\varepsilon(K))}{\log(\frac{1}{\varepsilon})}$$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dfrac{\partial u}{\partial t} & = & (1 + i\alpha)\triangle u + u - (1 + i\beta)u|u|^2 \\ u(t = 0) & = & u_0, \qquad u_0 \in L^2_{per}(-L, L). \end{array} \right. \tag{2}$$

Théorème (Ghidaglia, Héron. 1987)

Le problème de Cauchy pour (2) est bien posé. L'équation (2) possède un attracteur global $\mathcal{A}^0_{L,per}$.Ceci reste vrai dans tous les $H^k_{per}(-L, L)$ ($k \geq 0$).

Cas d'un domaine borné ($x \in [-L, L]$)

Définition (années 20)

Soit K un ensemble compact et $N_\varepsilon(K)$ le nombre de boules de rayon ε, nécessaires pour recouvrir K. La dimension fractale de K est

$$dim_F K := \limsup_{\varepsilon \to 0} \frac{\log(N_\varepsilon(K))}{\log(\frac{1}{\varepsilon})}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = (1+i\alpha)\triangle u + u - (1+i\beta)u|u|^2 \\ u(t=0) = u_0, \qquad u_0 \in L^2_{per}(-L, L). \end{cases} \tag{2}$$

Théorème (Ghidaglia, Héron. 1987)

Le problème de Cauchy pour (2) est bien posé. L'équation (2) possède un attracteur global $\mathcal{A}^0_{L,per}$. Ceci reste vrai dans tous les $H^k_{per}(-L, L)$ ($k \geq 0$).

$$\mathcal{A}^0_{L,per} = \mathcal{A}^1_{L,per} = ... = \mathcal{A}^k_{L,per},$$

Cas d'un domaine borné ($x \in [-L, L]$)

Définition (années 20)

Soit K un ensemble compact et $N_\varepsilon(K)$ le nombre de boules de rayon ε, nécessaires pour recouvrir K. La dimension fractale de K est

$$dim_F K := \limsup_{\varepsilon \to 0} \frac{\log(N_\varepsilon(K))}{\log(\frac{1}{\varepsilon})}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = (1+i\alpha)\triangle u + u - (1+i\beta)u|u|^2 \\ u(t=0) = u_0, \qquad u_0 \in L^2_{per}(-L, L). \end{cases} \tag{2}$$

Théorème (Ghidaglia, Héron. 1987)

Le problème de Cauchy pour (2) est bien posé. L'équation (2) possède un attracteur global $\mathcal{A}^0_{L,per}$.Ceci reste vrai dans tous les $H^k_{per}(-L, L)$ $(k \geq 0)$.

$$\mathcal{A}^0_{L,per} = \mathcal{A}^1_{L,per} = ... = \mathcal{A}^k_{L,per},$$

$$C'(\alpha, \beta)L \leq dim_F \mathcal{A}_{L,per} \leq C(\alpha, \beta)L.$$

Dans notre cas ($x \in \mathbb{R}$)

Dans notre cas ($x \in \mathbb{R}$)

Peut-on espérer avoir le même résultat pour CGL dans $\mathbb{R}$?

Dans notre cas ($x \in \mathbb{R}$)

Peut-on espérer avoir le même résultat pour CGL dans $\mathbb{R}$?Non.

Dans notre cas ($x \in \mathbb{R}$)

Peut-on espérer avoir le même résultat pour CGL dans $\mathbb{R}$?Non.

$$\text{Théorème Ghidaglia-Héron} \Longrightarrow dim_F(\mathcal{A}) = +\infty.$$

Dans notre cas ($x \in \mathbb{R}$)

Peut-on espérer avoir le même résultat pour CGL dans $\mathbb{R}$?Non.

$$\text{Théorème Ghidaglia-Héron} \Longrightarrow dim_F(\mathcal{A}) = +\infty.$$

Il est évident que $\mathcal{A}$ est beaucoup plus 'plat' que $H^1_{l,u}$ tout entier.

Dans notre cas ($x \in \mathbb{R}$)

Peut-on espérer avoir le même résultat pour CGL dans $\mathbb{R}$?Non.

$$\text{Théorème Ghidaglia-Héron} \Longrightarrow dim_F(\mathcal{A}) = +\infty.$$

Il est évident que $\mathcal{A}$ est beaucoup plus 'plat' que $H^1_{l,u}$ tout entier.
Soit $Q_L = [-L, L]$ et $\mathcal{A}|_{Q_L}$ la restriction des fonctions de $\mathcal{A}$ à Q_L.
Soit $N_\varepsilon(\mathcal{A}|_{Q_L})$ le nombre minimal de boules de rayon ε dans $L^2(Q_L)$, nécessaires pour recouvrir $\mathcal{A}|_{Q_L}$.

Dans notre cas ($x \in \mathbb{R}$)

Peut-on espérer avoir le même résultat pour CGL dans $\mathbb{R}$?Non.

$$\text{Théorème Ghidaglia-Héron} \Longrightarrow dim_F(\mathcal{A}) = +\infty.$$

Il est évident que $\mathcal{A}$ est beaucoup plus 'plat' que $H^1_{l,u}$ tout entier.
Soit $Q_L = [-L, L]$ et $\mathcal{A}|_{Q_L}$ la restriction des fonctions de $\mathcal{A}$ à Q_L.
Soit $N_\varepsilon(\mathcal{A}|_{Q_L})$ le nombre minimal de boules de rayon ε dans $L^2(Q_L)$, nécessaires pour recouvrir $\mathcal{A}|_{Q_L}$.

Lemme

Pour tout $L > 0$, on a

$$\liminf_{\varepsilon \to 0} \frac{log \ \ N_\varepsilon(\mathcal{A}|_{Q_L})}{\log \frac{1}{\varepsilon}} = +\infty.$$

Dans notre cas ($x \in \mathbb{R}$)

Peut-on espérer avoir le même résultat pour CGL dans $\mathbb{R}$?Non.

$$\text{Théorème Ghidaglia-Héron} \Longrightarrow dim_F(\mathcal{A}) = +\infty.$$

Il est évident que $\mathcal{A}$ est beaucoup plus 'plat' que $H^1_{l,u}$ tout entier.
Soit $Q_L = [-L, L]$ et $\mathcal{A}|_{Q_L}$ la restriction des fonctions de $\mathcal{A}$ à Q_L.
Soit $N_\varepsilon(\mathcal{A}|_{Q_L})$ le nombre minimal de boules de rayon ε dans $L^2(Q_L)$, nécessaires pour recouvrir $\mathcal{A}|_{Q_L}$.

Lemme

Pour tout $L > 0$, on a

$$\liminf_{\varepsilon \to 0} \frac{log \ \ N_\varepsilon(\mathcal{A}|_{Q_L})}{\log \frac{1}{\varepsilon}} = +\infty.$$

Fausse piste ! ! ! !

Dans notre cas ($x \in \mathbb{R}$)

Peut-on espérer avoir le même résultat pour CGL dans $\mathbb{R}$?Non.

$$\text{Théorème Ghidaglia-Héron} \Longrightarrow dim_F(\mathcal{A}) = +\infty.$$

Il est évident que $\mathcal{A}$ est beaucoup plus 'plat' que $H^1_{l,u}$ tout entier.
Soit $Q_L = [-L, L]$ et $\mathcal{A}|_{Q_L}$ la restriction des fonctions de $\mathcal{A}$ à Q_L.
Soit $N_\varepsilon(\mathcal{A}|_{Q_L})$ le nombre minimal de boules de rayon ε dans $L^2(Q_L)$, nécessaires pour recouvrir $\mathcal{A}|_{Q_L}$.

Lemme

Pour tout $L > 0$, on a

$$\liminf_{\varepsilon \to 0} \frac{log \;\; N_\varepsilon(\mathcal{A}|_{Q_L})}{\log \frac{1}{\varepsilon}} = +\infty.$$

Fausse piste ! ! ! !
L'idée est donc de faire $L \to \infty$ avant $\varepsilon \to 0$. On ne peut permuter les limites ! !

Dimension et ε-entropie

Définition

Soit K un ensemble compact et $N_\varepsilon(K)$ le nombre de boules de rayon ε, nécessaires pour recouvrir K. La dimension fractale de K est

$$dim_F K := \limsup_{\varepsilon\to 0} \frac{\log(N_\varepsilon(K))}{\log(\frac{1}{\varepsilon})} = \limsup_{\varepsilon\to 0} \frac{H_\varepsilon(K)}{\log(\frac{1}{\varepsilon})}.$$

Dimension et ε-entropie

Définition

Soit K un ensemble compact et $N_\varepsilon(K)$ le nombre de boules de rayon ε, nécessaires pour recouvrir K. La dimension fractale de K est

$$dim_F K := \limsup_{\varepsilon\to 0} \frac{\log(N_\varepsilon(K))}{\log(\frac{1}{\varepsilon})} = \limsup_{\varepsilon\to 0} \frac{H_\varepsilon(K)}{\log(\frac{1}{\varepsilon})}.$$

$$H_\varepsilon(K) = \log(N_\varepsilon(K)) \text{ } \textit{l'}\varepsilon\textit{-entropie de Kolmogorov}$$

Dimension et ε-entropie

Définition

Soit K un ensemble compact et $N_\varepsilon(K)$ le nombre de boules de rayon ε, nécessaires pour recouvrir K. La dimension fractale de K est

$$dim_F K := \limsup_{\varepsilon \to 0} \frac{\log(N_\varepsilon(K))}{\log(\frac{1}{\varepsilon})} = \limsup_{\varepsilon \to 0} \frac{H_\varepsilon(K)}{\log(\frac{1}{\varepsilon})}.$$

$$H_\varepsilon(K) = \log(N_\varepsilon(K)) \textit{ l'}\varepsilon\textit{-entropie de Kolmogorov}$$

$*$ $dim_F(K) = n$: $N_\varepsilon(K) \sim (\frac{1}{\varepsilon})^n$ et donc $H_\varepsilon(K) \sim n\log(\frac{1}{\varepsilon})$.

Dimension et ε-entropie

Définition

Soit K un ensemble compact et $N_\varepsilon(K)$ le nombre de boules de rayon ε, nécessaires pour recouvrir K. La dimension fractale de K est

$$dim_F K := \limsup_{\varepsilon\to 0} \frac{\log(N_\varepsilon(K))}{\log(\frac{1}{\varepsilon})} = \limsup_{\varepsilon\to 0} \frac{H_\varepsilon(K)}{\log(\frac{1}{\varepsilon})}.$$

$$H_\varepsilon(K) = \log(N_\varepsilon(K)) \textit{ l'}\varepsilon\textit{-entropie de Kolmogorov}$$

$*$ $dim_F(K) = n$: $N_\varepsilon(K) \sim (\frac{1}{\varepsilon})^n$ et donc $H_\varepsilon(K) \sim n\log(\frac{1}{\varepsilon})$.
$*$ $dim_F(K) = \infty$: $\forall n \in \mathbb{N}$, $N_\varepsilon(K) \gg (\frac{1}{\varepsilon})^n$ et donc $H_\varepsilon(K) \gg n\log(\frac{1}{\varepsilon})$.

Dimension et ε-entropie

$*$ Autres asymptotiques :

Dimension et ε-entropie

$*$ Autres asymptotiques : $H_\varepsilon(K_1) \sim (\log(\frac{1}{\varepsilon}))^{d_1}$, $H_\varepsilon(K_2) \sim \frac{d_2}{\varepsilon}\log(\frac{1}{\varepsilon})$ ou $H_\varepsilon(K_3) \sim (\frac{1}{\varepsilon})^{d_3}$....

Dimension et ε-entropie

$*$ Autres asymptotiques : $H_\varepsilon(K_1) \sim (\log(\frac{1}{\varepsilon}))^{d_1}$, $H_\varepsilon(K_2) \sim \frac{d_2}{\varepsilon}\log(\frac{1}{\varepsilon})$ ou $H_\varepsilon(K_3) \sim (\frac{1}{\varepsilon})^{d_3}$....
$*$ Dimensions fonctionnelles :

Dimension et ε-entropie

$*$ Autres asymptotiques : $H_\varepsilon(K_1) \sim (\log(\frac{1}{\varepsilon}))^{d_1}$, $H_\varepsilon(K_2) \sim \frac{d_2}{\varepsilon}\log(\frac{1}{\varepsilon})$ ou $H_\varepsilon(K_3) \sim (\frac{1}{\varepsilon})^{d_3}$....

$*$ Dimensions fonctionnelles :

$$dimf(K_1) = \limsup_{\varepsilon\to 0} \frac{\log(H_\varepsilon(K_1))}{\log(\log(\frac{1}{\varepsilon}))} = \limsup_{\varepsilon\to 0} \frac{\log(\log(N_\varepsilon(K_1)))}{\log(\log(\frac{1}{\varepsilon}))} = d_1.$$

Dimension et ε-entropie

$*$ Autres asymptotiques : $H_\varepsilon(K_1) \sim (\log(\frac{1}{\varepsilon}))^{d_1}$, $H_\varepsilon(K_2) \sim \frac{d_2}{\varepsilon}\log(\frac{1}{\varepsilon})$ ou $H_\varepsilon(K_3) \sim (\frac{1}{\varepsilon})^{d_3}$....

$*$ Dimensions fonctionnelles :

$$dimf(K_1) = \limsup_{\varepsilon\to 0} \frac{\log(H_\varepsilon(K_1))}{\log(\log(\frac{1}{\varepsilon}))} = \limsup_{\varepsilon\to 0} \frac{\log(\log(N_\varepsilon(K_1)))}{\log(\log(\frac{1}{\varepsilon}))} = d_1.$$

$$dimf(K_2) = \limsup_{\varepsilon\to 0} \frac{H_\varepsilon(K_2)}{\frac{1}{\varepsilon}\log(\frac{1}{\varepsilon})} = \limsup_{\varepsilon\to 0} \frac{\log(N_\varepsilon(K_2))}{\frac{1}{\varepsilon}\log(\frac{1}{\varepsilon})} = d_2.$$

Dimension et ε-entropie

$*$ Autres asymptotiques : $H_\varepsilon(K_1) \sim (\log(\frac{1}{\varepsilon}))^{d_1}$, $H_\varepsilon(K_2) \sim \frac{d_2}{\varepsilon}\log(\frac{1}{\varepsilon})$ ou $H_\varepsilon(K_3) \sim (\frac{1}{\varepsilon})^{d_3}$....

$*$ Dimensions fonctionnelles :

$$dimf(K_1) = \limsup_{\varepsilon\to 0} \frac{\log(H_\varepsilon(K_1))}{\log(\log(\frac{1}{\varepsilon}))} = \limsup_{\varepsilon\to 0} \frac{\log(\log(N_\varepsilon(K_1)))}{\log(\log(\frac{1}{\varepsilon}))} = d_1.$$

$$dimf(K_2) = \limsup_{\varepsilon\to 0} \frac{H_\varepsilon(K_2)}{\frac{1}{\varepsilon}\log(\frac{1}{\varepsilon})} = \limsup_{\varepsilon\to 0} \frac{\log(N_\varepsilon(K_2))}{\frac{1}{\varepsilon}\log(\frac{1}{\varepsilon})} = d_2.$$

$$dimf(K_3) = \limsup_{\varepsilon\to 0} \frac{\log(H_\varepsilon(K_3))}{\log(\frac{1}{\varepsilon})} = \limsup_{\varepsilon\to 0} \frac{\log(\log(N_\varepsilon(K_3)))}{\log(\frac{1}{\varepsilon})} = d_3.$$

Dimension et ε-entropie

Exemple 1 : La boule $B(0, C)$ de $H^k(0, 2\pi)$

$$\{f - 2\pi - periodique / \|f\|^2 = \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 + |f'(x)|^2 + ...|f^{(k)}(x)|^2 dx \leq C^2\}$$

Dimension et ε-entropie

Exemple 1 : La boule $B(0, C)$ de $H^k(0, 2\pi)$

$$\{f - 2\pi - periodique / \|f\|^2 = \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 + |f'(x)|^2 + ...|f^{(k)}(x)|^2 dx \leq C^2\}$$

$$H_\varepsilon(B(0, C)) \sim (\frac{C}{\varepsilon})^{\frac{1}{k}}$$

Dimension et ε-entropie

Exemple 1 : La boule $B(0, C)$ de $H^k(0, 2\pi)$

$$\{f - 2\pi - periodique / \|f\|^2 = \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 + |f'(x)|^2 + ... |f^{(k)}(x)|^2 dx \leq C^2\}$$

$$H_\varepsilon(B(0, C)) \sim (\frac{C}{\varepsilon})^{\frac{1}{k}}$$

$$dimf(B(0, C)) = \limsup_{\varepsilon \to 0} \frac{\log(H_\varepsilon(B))}{\log(\frac{1}{\varepsilon})} = \limsup_{\varepsilon \to 0} \frac{\log(\log(N_\varepsilon(B)))}{\log(\frac{1}{\varepsilon})} = \frac{1}{k}$$

Dimension et ε-entropie

Définition (Kolmogorov, Tikhomirov. 1959)

Soit K un ensemble fonctionnel localement compact, ($K|_{Q_L}$ est compact)

$$\overline{H}_\varepsilon(K) = \lim_{L\to\infty} \frac{log(N_\varepsilon(K|_{Q_L}))}{2L} = \lim_{L\to\infty} \frac{H^L_\varepsilon(K|_{Q_L})}{|Q_L|}$$

Dimension et ε-entropie

Définition (Kolmogorov, Tikhomirov. 1959)

Soit K un ensemble fonctionnel localement compact, ($K|_{Q_L}$ est compact)

$$\overline{H}_\varepsilon(K) = \lim_{L\to\infty} \frac{log(N_\varepsilon(K|_{Q_L}))}{2L} = \lim_{L\to\infty} \frac{H^L_\varepsilon(K|_{Q_L})}{|Q_L|}$$

$dim_{F/l}(K) = \limsup_{\varepsilon\to 0} \frac{\overline{H}_\varepsilon(K)}{-\log\ \varepsilon}$. *Dimension fractale par unité de longueur*

Dimension et ε-entropie

Définition (Kolmogorov, Tikhomirov. 1959)

Soit K un ensemble fonctionnel localement compact, ($K|_{Q_L}$ est compact)

$$\overline{H}_\varepsilon(K) = \lim_{L\to\infty} \frac{log(N_\varepsilon(K|_{Q_L}))}{2L} = \lim_{L\to\infty} \frac{H_\varepsilon^L(K|_{Q_L})}{|Q_L|}$$

$dim_{F/l}(K) = \limsup_{\varepsilon\to 0} \frac{\overline{H}_\varepsilon(K)}{-\log\ \varepsilon}$. *Dimension fractale par unité de longueur*

Exemple 2 : Espace basse fréquence

$$B_\Omega(\mathbb{R}) = \{u \in L^2(\mathbb{R})/Supp(\widehat{u}) \subset [-\Omega,\Omega]\}.$$

Dimension et ε-entropie

Définition (Kolmogorov, Tikhomirov. 1959)

Soit K un ensemble fonctionnel localement compact, ($K|_{Q_L}$ est compact)

$$\overline{H}_\varepsilon(K) = \lim_{L\to\infty} \frac{log(N_\varepsilon(K|_{Q_L}))}{2L} = \lim_{L\to\infty} \frac{H^L_\varepsilon(K|_{Q_L})}{|Q_L|}$$

$dim_{F/l}(K) = \limsup_{\varepsilon\to 0} \frac{\overline{H}_\varepsilon(K)}{-\log\ \varepsilon}$. *Dimension fractale par unité de longueur*

Exemple 2 : Espace basse fréquence

$$B_\Omega(\mathbb{R}) = \{u \in L^2(\mathbb{R})/Supp(\widehat{u}) \subset [-\Omega, \Omega]\}.$$

$$\overline{H}_\varepsilon(B_\Omega(\mathbb{R})) \sim (\frac{2\Omega}{\pi}) \log(\frac{1}{\varepsilon}),$$

Dimension et ε-entropie

Définition (Kolmogorov, Tikhomirov. 1959)

Soit K un ensemble fonctionnel localement compact, ($K|_{Q_L}$ est compact)

$$\overline{H}_\varepsilon(K) = \lim_{L\to\infty} \frac{log(N_\varepsilon(K|_{Q_L}))}{2L} = \lim_{L\to\infty} \frac{H^L_\varepsilon(K|_{Q_L})}{|Q_L|}$$

$dim_{F/l}(K) = \limsup_{\varepsilon\to 0} \frac{\overline{H}_\varepsilon(K)}{-\log\ \varepsilon}$. *Dimension fractale par unité de longueur*

Exemple 2 : Espace basse fréquence

$$B_\Omega(\mathbb{R}) = \{u \in L^2(\mathbb{R})/Supp(\widehat{u}) \subset [-\Omega, \Omega]\}.$$

$$\overline{H}_\varepsilon(B_\Omega(\mathbb{R})) \sim (\frac{2\Omega}{\pi}) \log(\frac{1}{\varepsilon}),$$

$$dim_{F/l}(B_\Omega(\mathbb{R})) = \frac{2\Omega}{\pi}.$$

Dimension et ε-entropie

Exemple 2 : Espace basse fréquence

$$B_\Omega(\mathbb{R}) = \{u \in L^2(\mathbb{R}) / Supp(\widehat{u}) \subset [-\Omega, \Omega]\}.$$

$$\overline{H}_\varepsilon(B_\Omega(\mathbb{R})) \sim (\frac{2\Omega}{\pi}) \log(\frac{1}{\varepsilon}),$$

$$dim_{F/I}(B_\Omega(\mathbb{R})) = \frac{2\Omega}{\pi}.$$

Théorème (Nyquiest-Kotelnikov-Shannon)

Si $f \in B_\Omega(\mathbb{R})$ alors

$$f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(\frac{k\pi}{2\Omega}) \frac{sin(2\Omega x - k\pi)}{2\Omega x - k\pi}$$

Résultat et idées de la preuve

Résultat-théorème

Résultat-théorème

Théorème (Cadre L^∞, Collet, Eckmann. 1998)

Il existe $C(\alpha, \beta)$ tel que pour ε assez petit,

$$\frac{1}{C}\log(\frac{1}{\varepsilon}) \leq \overline{H}'_\varepsilon(\mathcal{A}) \leq C\log(\frac{1}{\varepsilon}).$$

Résultat-théorème

Théorème (Cadre L^∞, Collet, Eckmann. 1998)

Il existe $C(\alpha, \beta)$ tel que pour ε assez petit,

$$\frac{1}{C}\log(\frac{1}{\varepsilon}) \leq \overline{H}'_{\varepsilon}(\mathcal{A}) \leq C\log(\frac{1}{\varepsilon}).$$

Définition

$$\|u\|^2_{L^2(Q_L)} = \frac{1}{2L}\int_{Q_L}|u(x)|^2 dx.$$

Résultat-théorème

Théorème (Cadre L^∞, Collet, Eckmann. 1998)

Il existe $C(\alpha,\beta)$ tel que pour ε assez petit,

$$\frac{1}{C}\log(\frac{1}{\varepsilon}) \leq \overline{H}'_\varepsilon(\mathcal{A}) \leq C\log(\frac{1}{\varepsilon}).$$

Définition

$$\|u\|^2_{L^2(Q_L)} = \frac{1}{2L}\int_{Q_L}|u(x)|^2dx.$$

Théorème (Goubet-Maaroufi 2012)

Dans ce cadre hilbertien la limite $\overline{H}_\varepsilon(K)$ existe. De plus, il existe $C(\alpha,\beta) > 0$ tel que pour ε petit,

$$\frac{1}{C}\log(\frac{1}{\varepsilon}) \leq \overline{H}_\varepsilon(\mathcal{A}) \leq C\log(\frac{1}{\varepsilon}).$$

Existence de la limite

Existence de la limite

Lemme (1)

Soient B et B' deux intervalles disjoints et bornés de $\mathbb{R}$. On a

$$N_\varepsilon(\mathcal{A}|_{B\cup B'}) \leq N_\varepsilon(\mathcal{A}|_B)N_\varepsilon(\mathcal{A}|_{B'}).$$

Existence de la limite

Lemme (1)

Soient B et B' deux intervalles disjoints et bornés de $\mathbb{R}$. On a

$$N_\varepsilon(\mathcal{A}|_{B\cup B'}) \leq N_\varepsilon(\mathcal{A}|_B)N_\varepsilon(\mathcal{A}|_{B'}).$$

Corollaire

La limite $\overline{H}_\varepsilon(\mathcal{A}) = \lim_{L\to\infty} \frac{log(N_{Q_L}(\varepsilon))}{2L}$ existe.

- $\mathcal{A}$ est invariant par translation
- La suite $L \to log(N_{Q_L}(\varepsilon))$ est une suite Van Hove

Existence de la limite

Lemme (1)

Soient B et B' deux intervalles disjoints et bornés de $\mathbb{R}$. On a

$$N_\varepsilon(\mathcal{A}|_{B\cup B'}) \leq N_\varepsilon(\mathcal{A}|_B)N_\varepsilon(\mathcal{A}|_{B'}).$$

Corollaire

La limite $\overline{H}_\varepsilon(\mathcal{A}) = \lim_{L\to\infty} \frac{log(N_{Q_L}(\varepsilon))}{2L}$ existe.

- $\mathcal{A}$ est invariant par translation
- La suite $L \to log(N_{Q_L}(\varepsilon))$ est une suite Van Hove

Remarque

- $N_{\sqrt{2}\varepsilon}(\mathcal{A}|_{B\cup B'}) \leq N_\varepsilon(\mathcal{A}|_B)N_\varepsilon(\mathcal{A}|_{B'})$
- *On utilise une fois seulement une des propriétés de l'attracteur $\mathcal{A}$*

Comment majorer l'ε-entropie par unité de longueur de $\mathcal{A}$?

Comment majorer l'ε-entropie par unité de longueur de $\mathcal{A}$?

Nous pouvons formuler cette question dans un cadre plus abstrait.
Comment majorer la dimension fractale ou l'ε-entropie d'un ensemble compact X invariant par une application $(f(X) = X)$?

Comment majorer l'ε-entropie par unité de longueur de $\mathcal{A}$?

Nous pouvons formuler cette question dans un cadre plus abstrait.
Comment majorer la dimension fractale ou l'ε-entropie d'un ensemble compact X invariant par une application $(f(X) = X)$?

A. Douady et J. Osterle. 1980

Comment majorer l'ε-entropie par unité de longueur de $\mathcal{A}$?

Nous pouvons formuler cette question dans un cadre plus abstrait. Comment majorer la dimension fractale ou l'ε-entropie d'un ensemble compact X invariant par une application $(f(X) = X)$?

A. Douady et J. Osterle. 1980

Il suffit de savoir majorer $N(\varepsilon)$ le nombre de boules de rayon ε, nécessaires pour recouvrir X.

Comment majorer l'ε-entropie par unité de longueur de $\mathcal{A}$?

Nous pouvons formuler cette question dans un cadre plus abstrait. Comment majorer la dimension fractale ou l'ε-entropie d'un ensemble compact X invariant par une application $(f(X) = X)$?

A. Douady et J. Osterle. 1980

Il suffit de savoir majorer $N(\varepsilon)$ le nombre de boules de rayon ε, nécessaires pour recouvrir X.

$$N(\varepsilon) \leq N(\tfrac{\varepsilon}{2})$$

Comment majorer l'ε-entropie par unité de longueur de $\mathcal{A}$?

Nous pouvons formuler cette question dans un cadre plus abstrait. Comment majorer la dimension fractale ou l'ε-entropie d'un ensemble compact X invariant par une application ($f(X) = X$) ?

A. Douady et J. Osterle. 1980

Il suffit de savoir majorer $N(\varepsilon)$ le nombre de boules de rayon ε, nécessaires pour recouvrir X.

$$N(\varepsilon) \leq N(\tfrac{\varepsilon}{2}) \quad \text{évident,}$$

Comment majorer l'ε-entropie par unité de longueur de $\mathcal{A}$?

Nous pouvons formuler cette question dans un cadre plus abstrait. Comment majorer la dimension fractale ou l'ε-entropie d'un ensemble compact X invariant par une application ($f(X) = X$) ?

A. Douady et J. Osterle. 1980

Il suffit de savoir majorer $N(\varepsilon)$ le nombre de boules de rayon ε, nécessaires pour recouvrir X.

$$N(\varepsilon) \leq N(\tfrac{\varepsilon}{2}) \quad \text{évident,}$$

$$N(\tfrac{\varepsilon}{2}) \leq CN(\varepsilon)$$

Comment majorer l'ε-entropie par unité de longueur de $\mathcal{A}$?

Nous pouvons formuler cette question dans un cadre plus abstrait. Comment majorer la dimension fractale ou l'ε-entropie d'un ensemble compact X invariant par une application $(f(X) = X)$?

A. Douady et J. Osterle. 1980

Il suffit de savoir majorer $N(\varepsilon)$ le nombre de boules de rayon ε, nécessaires pour recouvrir X.

$$N(\varepsilon) \leq N(\tfrac{\varepsilon}{2}) \quad \text{évident,}$$

$$N(\tfrac{\varepsilon}{2}) \leq CN(\varepsilon) \quad \text{difficile à obtenir !!}$$

Déformation des boules par $S(1)$

Soit $\mathcal{B}$ un recouvrement de $S(t)\mathcal{A}|_{Q_L}$ de $N_{Q_L}^{(t)}(\varepsilon)$ boules de rayon ε

$$S(t)\mathcal{A}|_{Q_L} \subset \bigcup_{B\in\mathcal{B}} (B \cap S(t)\mathcal{A})|_{Q_L}. \tag{3}$$

$$S(t+1)\mathcal{A}|_{Q_L} \subset \bigcup_{B\in\mathcal{B}} S(1)(B \cap S(t)\mathcal{A})|_{Q_L}. \tag{4}$$

Il suffit de savoir recouvrir $S(1)(B \cap S(t)\mathcal{A})|_{Q_L}$ par des boules de rayon $\frac{\varepsilon}{2}$.

Déformation des boules par $S(1)$

Comment $S(1)$ transforme un élément $(B \cap S(t)\mathcal{A})|_{Q_L}$?

Déformation des boules par $S(1)$

Comment $S(1)$ transforme un élément $(B \cap S(t)\mathcal{A})|_{Q_L}$?

Proposition (1)

Soit $\varepsilon > 0$ avec $L > \frac{3}{\varepsilon}$, u_0 le centre de B et $v_0 \in (B \cap S(t)\mathcal{A})|_{Q_L}$ donc,

$$\|w_0(= u_0 - v_0)\|_{L^2(Q_L)} \leq \varepsilon.$$

Déformation des boules par $S(1)$

Comment $S(1)$ transforme un élément $(B \cap S(t)\mathcal{A})|_{Q_L}$?

Proposition (1)

Soit $\varepsilon > 0$ avec $L > \frac{3}{\varepsilon}$, u_0 le centre de B et $v_0 \in (B \cap S(t)\mathcal{A})|_{Q_L}$ donc,

$$\|w_0(= u_0 - v_0)\|_{L^2(Q_L)} \leq \varepsilon.$$

$$\|w(1,.)\|_{L^2(Q_{L-\frac{1}{\varepsilon}})} \leq c(\alpha,\beta)\varepsilon \tag{5}$$

$$\|\nabla w(1,.)\|_{L^2(Q_{L-\frac{1}{\varepsilon}})} \leq c'(\alpha,\beta)\varepsilon \tag{6}$$

$S(1)$ envoie un élément $(B \cap S(t)\mathcal{A})|_{Q_L}$ dans une boules de $H^1(Q_{L-\frac{1}{\varepsilon}})$ de rayon $c(\alpha,\beta)\varepsilon$.

Recouvrement

Recouvrement

Proposition (2)

Soit Q_l un intervalle de $\mathbb{R}$ de longueur $2l$,

$$\mathcal{U} = \left\{ u \in H^1(Q_l);\, \|u\|_{L^2(Q_l)} \leq a \text{ et } \|\nabla u\|_{L^2(Q_l)} \leq b \right\}.$$

Recouvrement

Proposition (2)

Soit Q_l un intervalle de $\mathbb{R}$ de longueur $2l$,

$$\mathcal{U} = \Big\{ u \in H^1(Q_l);\, \|u\|_{L^2(Q_l)} \leq a \text{ et } \|\nabla u\|_{L^2(Q_l)} \leq b \Big\}.$$

Il existe une constante c, on peut recouvrir $\mathcal{U}$ avec au plus,

$(\frac{2a}{\varepsilon} + 1)^{\frac{8bl}{\pi\varepsilon}}$ *boules de rayons ε dans $L^2(Q_l)$.*

Recouvrement

$Q_l = \cup_{i=1}^{m} Q_i, |Q_i| = 2r,$

Recouvrement

$Q_l = \cup_{i=1}^{m} Q_i, |Q_i| = 2r$, $e_{\{i=1,2..m\}} = \sqrt{\frac{l}{r}}\chi_{Q_i}$ une famille orthonormale dans $L^2(Q_l)$.

Recouvrement

$Q_l = \cup_{i=1}^{m} Q_i, |Q_i| = 2r$, $e_{\{i=1,2..m\}} = \sqrt{\frac{l}{r}}\chi_{Q_i}$ une famille orthonormale dans $L^2(Q_l)$.Soit P le projecteur orthogonal sur $vect\{e_i\}_{i=1,2..m}$.

Recouvrement

$Q_l = \cup_{i=1}^{m} Q_i, |Q_i| = 2r$, $e_{\{i=1,2..m\}} = \sqrt{\frac{l}{r}}\chi_{Q_i}$ une famille orthonormale dans $L^2(Q_l)$.Soit P le projecteur orthogonal sur $vect\{e_i\}_{i=1,2..m}$.
$u = Pu + (u - Pu)$.

Recouvrement

$Q_l = \cup_{i=1}^{m} Q_i, |Q_i| = 2r$, $e_{\{i=1,2..m\}} = \sqrt{\frac{l}{r}}\chi_{Q_i}$ une famille orthonormale dans $L^2(Q_l)$.Soit P le projecteur orthogonal sur $vect\{e_i\}_{i=1,2..m}$.
$u = Pu + (u - Pu)$.On utilise Poincaré-Wirtinger pour contrôler $(u - Pu)$,

Recouvrement

$Q_l = \cup_{i=1}^{m} Q_i, |Q_i| = 2r$, $e_{\{i=1,2..m\}} = \sqrt{\frac{l}{r}}\chi_{Q_i}$ une famille orthonormale dans $L^2(Q_l)$.Soit P le projecteur orthogonal sur $vect\{e_i\}_{i=1,2..m}$.
$u = Pu + (u - Pu)$.On utilise Poincaré-Wirtinger pour contrôler $(u - Pu)$,

$$\frac{1}{2l}\int_{Q_l} |u(x) - Pu(x)|^2 dx \leq \frac{4r^2 b^2}{\pi^2}.$$

Recouvrement

$Q_l = \cup_{i=1}^{m} Q_i, |Q_i| = 2r$, $e_{\{i=1,2..m\}} = \sqrt{\frac{l}{r}}\chi_{Q_i}$ une famille orthonormale dans $L^2(Q_l)$.Soit P le projecteur orthogonal sur $vect\{e_i\}_{i=1,2..m}$.
$u = Pu + (u - Pu)$.On utilise Poincaré-Wirtinger pour contrôler $(u - Pu)$,

$$\frac{1}{2l}\int_{Q_l} |u(x) - Pu(x)|^2 dx \leq \frac{4r^2b^2}{\pi^2}.$$

On fixe r tel que $\frac{2rb}{\pi} = \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow m = \frac{l}{r} = \frac{4bl}{\varepsilon\pi}$

Recouvrement

$Q_l = \cup_{i=1}^{m} Q_i, |Q_i| = 2r$, $e_{\{i=1,2..m\}} = \sqrt{\frac{l}{r}}\chi_{Q_i}$ une famille orthonormale dans $L^2(Q_l)$.Soit P le projecteur orthogonal sur $vect\{e_i\}_{i=1,2..m}$.
$u = Pu + (u - Pu)$.On utilise Poincaré-Wirtinger pour contrôler $(u - Pu)$,

$$\frac{1}{2l}\int_{Q_l} |u(x) - Pu(x)|^2 dx \leq \frac{4r^2 b^2}{\pi^2}.$$

On fixe r tel que $\frac{2rb}{\pi} = \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow m = \frac{l}{r} = \frac{4bl}{\varepsilon\pi} \Rightarrow \|u - Pu\|_{L^2(Q_l)} \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Recouvrement

$Q_l = \cup_{i=1}^{m} Q_i, |Q_i| = 2r$, $e_{\{i=1,2..m\}} = \sqrt{\frac{l}{r}}\chi_{Q_i}$ une famille orthonormale dans $L^2(Q_l)$.Soit P le projecteur orthogonal sur $vect\{e_i\}_{i=1,2..m}$.
$u = Pu + (u - Pu)$.On utilise Poincaré-Wirtinger pour contrôler $(u - Pu)$,

$$\frac{1}{2l}\int_{Q_l} |u(x) - Pu(x)|^2 dx \leq \frac{4r^2b^2}{\pi^2}.$$

On fixe r tel que $\frac{2rb}{\pi} = \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow m = \frac{l}{r} = \frac{4bl}{\varepsilon\pi} \Rightarrow \|u - Pu\|_{L^2(Q_l)} \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

$$\|Pu\|_{L^2(Q_l)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} |(u, e_i)|^2} \leq \|u\|_{L^2(Q_l)} \leq a. \tag{7}$$

Recouvrement

$Q_l = \cup_{i=1}^m Q_i, |Q_i| = 2r$, $e_{\{i=1,2..m\}} = \sqrt{\frac{l}{r}}\chi_{Q_i}$ une famille orthonormale dans $L^2(Q_l)$.Soit P le projecteur orthogonal sur $vect\{e_i\}_{i=1,2..m}$.
$u = Pu + (u - Pu)$.On utilise Poincaré-Wirtinger pour contrôler $(u - Pu)$,

$$\frac{1}{2l}\int_{Q_l} |u(x) - Pu(x)|^2 dx \leq \frac{4r^2b^2}{\pi^2}.$$

On fixe r tel que $\frac{2rb}{\pi} = \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow m = \frac{l}{r} = \frac{4bl}{\varepsilon\pi} \Rightarrow \|u - Pu\|_{L^2(Q_l)} \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

$$\|Pu\|_{L^2(Q_l)} = \sqrt{\sum_{i=1}^m |(u, e_i)|^2} \leq \|u\|_{L^2(Q_l)} \leq a. \tag{7}$$

Lemme (2)

Soit $N(\varepsilon)$ le nombre minimal de boules de rayon ε, nécessaire pour recouvrir $B_{\mathbb{R}^{2m}} = \left\{x \in \mathbb{R}^{2m}; \|x\|_{\mathbb{R}^{2m}} \leq a\right\}$. on a $N(\varepsilon) \leq \left(1 + \frac{2a}{\varepsilon}\right)^{2m}$

Recouvrement

$Q_l = \cup_{i=1}^{m} Q_i, |Q_i| = 2r$, $e_{\{i=1,2..m\}} = \sqrt{\frac{l}{r}}\chi_{Q_i}$ une famille orthonormale dans $L^2(Q_l)$.Soit P le projecteur orthogonal sur $vect\{e_i\}_{i=1,2..m}$.
$u = Pu + (u - Pu)$.On utilise Poincaré-Wirtinger pour contrôler $(u - Pu)$,

$$\frac{1}{2l}\int_{Q_l} |u(x) - Pu(x)|^2 dx \leq \frac{4r^2b^2}{\pi^2}.$$

On fixe r tel que $\frac{2rb}{\pi} = \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow m = \frac{l}{r} = \frac{4bl}{\varepsilon\pi} \Rightarrow \|u - Pu\|_{L^2(Q_l)} \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

$$\|Pu\|_{L^2(Q_l)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} |(u, e_i)|^2} \leq \|u\|_{L^2(Q_l)} \leq a. \tag{7}$$

Lemme (2)

Soit $N(\varepsilon)$ le nombre minimal de boules de rayon ε, nécessaire pour recouvrir $B_{\mathbb{R}^{2m}} = \left\{x \in \mathbb{R}^{2m}; \|x\|_{\mathbb{R}^{2m}} \leq a\right\}$. on a $N(\varepsilon) \leq \left(1 + \frac{2a}{\varepsilon}\right)^{2m}$ $\square$

Lemme (3)

Il existe c_1, c_2, C_3 *tel que pour* $\varepsilon > 0$ *petit et* $L > \frac{3}{\varepsilon}$,

$$N_{Q_L}^{t+1}(\frac{\varepsilon}{2}) \leq \left(\frac{c_1}{\varepsilon}\right)^{c_2(\varepsilon)^{-2}} C_3^L N_{Q_L}^t(\varepsilon). \tag{8}$$

Lemme (3)

Il existe c_1, c_2, C_3 *tel que pour* $\varepsilon > 0$ *petit et* $L > \frac{3}{\varepsilon}$,

$$N_{Q_L}^{t+1}(\frac{\varepsilon}{2}) \leq \left(\frac{c_1}{\varepsilon}\right)^{c_2(\varepsilon)^{-2}} C_3^L N_{Q_L}^t(\varepsilon). \qquad (8)$$

On veut recouvrir $S(1)(B \cap S(t)\mathcal{A})|_{Q_L}$.

Lemme (3)

Il existe c_1, c_2, C_3 *tel que pour* $\varepsilon > 0$ *petit et* $L > \frac{3}{\varepsilon}$,

$$N_{Q_L}^{t+1}(\frac{\varepsilon}{2}) \leq \left(\frac{c_1}{\varepsilon}\right)^{c_2(\varepsilon)^{-2}} C_3^L N_{Q_L}^t(\varepsilon). \tag{8}$$

On veut recouvrir $S(1)(B \cap S(t)\mathcal{A})|_{Q_L}$.Lemme(1)$\Rightarrow$

Lemme (3)

Il existe c_1, c_2, C_3 *tel que pour* $\varepsilon > 0$ *petit et* $L > \frac{3}{\varepsilon}$,

$$N_{Q_L}^{t+1}(\frac{\varepsilon}{2}) \leq \left(\frac{c_1}{\varepsilon}\right)^{c_2(\varepsilon)^{-2}} C_3^L N_{Q_L}^t(\varepsilon). \tag{8}$$

On veut recouvrir $S(1)(B \cap S(t)\mathcal{A})|_{Q_L}$.Lemme(1)$\Rightarrow$il suffit de recouvrir $S(1)(B \cap S(t)\mathcal{A})|_{Q_{L-\frac{1}{\varepsilon}}}$ et $S(1)(B \cap S(t)\mathcal{A})|_{Q_L \setminus Q_{L-\frac{1}{\varepsilon}}}$.

Lemme (3)

Il existe c_1, c_2, C_3 tel que pour $\varepsilon > 0$ petit et $L > \frac{3}{\varepsilon}$,

$$N_{Q_L}^{t+1}(\frac{\varepsilon}{2}) \leq \left(\frac{c_1}{\varepsilon}\right)^{c_2(\varepsilon)^{-2}} C_3^L N_{Q_L}^t(\varepsilon). \tag{8}$$

On veut recouvrir $S(1)(B \cap S(t)\mathcal{A})|_{Q_L}$.Lemme(1)⇒il suffit de recouvrir $S(1)(B \cap S(t)\mathcal{A})|_{Q_{L-\frac{1}{\varepsilon}}}$ et $S(1)(B \cap S(t)\mathcal{A})|_{Q_L \setminus Q_{L-\frac{1}{\varepsilon}}}$.

Proposition(1)+Proposition(2)⇒ C_3^L,

Lemme (3)

Il existe c_1, c_2, C_3 tel que pour $\varepsilon > 0$ petit et $L > \frac{3}{\varepsilon}$,

$$N_{Q_L}^{t+1}(\frac{\varepsilon}{2}) \leq \left(\frac{c_1}{\varepsilon}\right)^{c_2(\varepsilon)^{-2}} C_3^L N_{Q_L}^t(\varepsilon). \tag{8}$$

On veut recouvrir $S(1)(B \cap S(t)\mathcal{A})|_{Q_L}$.Lemme(1)$\Rightarrow$il suffit de recouvrir $S(1)(B \cap S(t)\mathcal{A})|_{Q_{L-\frac{1}{\varepsilon}}}$ et $S(1)(B \cap S(t)\mathcal{A})|_{Q_L \setminus Q_{L-\frac{1}{\varepsilon}}}$.

Proposition(1)+Proposition(2)$\Rightarrow$ C_3^L,

Borne $W^{1,\infty}$ uniforme sur $\mathcal{A}$ +Proposition(2)$\Rightarrow$ $\left(\frac{c_1}{\varepsilon}\right)^{c_2(\varepsilon)^{-2}}$.

Lemme (3)

Il existe c_1, c_2, C_3 *tel que pour* $\varepsilon > 0$ *petit et* $L > \frac{3}{\varepsilon}$,

$$N_{Q_L}^{t+1}(\frac{\varepsilon}{2}) \leq \left(\frac{c_1}{\varepsilon}\right)^{c_2(\varepsilon)^{-2}} C_3^L N_{Q_L}^t(\varepsilon). \tag{8}$$

On veut recouvrir $S(1)(B \cap S(t)\mathcal{A})|_{Q_L}$.Lemme(1)$\Rightarrow$il suffit de recouvrir $S(1)(B \cap S(t)\mathcal{A})|_{Q_{L-\frac{1}{\varepsilon}}}$ et $S(1)(B \cap S(t)\mathcal{A})|_{Q_L \setminus Q_{L-\frac{1}{\varepsilon}}}$.

Proposition(1)+Proposition(2)$\Rightarrow$ C_3^L,

Borne $W^{1,\infty}$ uniforme sur $\mathcal{A}$ +Proposition(2)$\Rightarrow$ $\left(\frac{c_1}{\varepsilon}\right)^{c_2(\varepsilon)^{-2}}$.$\square$

Pour finir on utilise le Lemme(3) récursivement en commençant à l'instant $t = 1$ avec $\varepsilon = 1$.

$$N_{Q_L}^{(t=1)}(1) \leq e^{c(\alpha,\beta)L},$$

Lemme (3)

Il existe c_1, c_2, C_3 tel que pour $\varepsilon > 0$ petit et $L > \frac{3}{\varepsilon}$,

$$N_{Q_L}^{t+1}(\frac{\varepsilon}{2}) \leq \left(\frac{c_1}{\varepsilon}\right)^{c_2(\varepsilon)^{-2}} C_3^L N_{Q_L}^t(\varepsilon). \tag{8}$$

On veut recouvrir $S(1)(B \cap S(t)\mathcal{A})|_{Q_L}$.Lemme(1)$\Rightarrow$il suffit de recouvrir $S(1)(B \cap S(t)\mathcal{A})|_{Q_{L-\frac{1}{\varepsilon}}}$ et $S(1)(B \cap S(t)\mathcal{A})|_{Q_L \setminus Q_{L-\frac{1}{\varepsilon}}}$.

$$\text{Proposition(1)+Proposition(2)} \Rightarrow C_3^L,$$

$$\text{Borne } W^{1,\infty} \text{ uniforme sur } \mathcal{A} \text{ +Proposition(2)} \Rightarrow \left(\frac{c_1}{\varepsilon}\right)^{c_2(\varepsilon)^{-2}}.\Box$$

Pour finir on utilise le Lemme(3) récursivement en commençant à l'instant $t = 1$ avec $\varepsilon = 1$.

$$N_{Q_L}^{(t=1)}(1) \leq e^{c(\alpha,\beta)L},$$

$$N_{Q_L}^{n+1}(2^{-n}) \leq C_3^{nL} e^{c(\alpha,\beta)L} C(n). \tag{9}$$

Lemme (3)

Il existe c_1, c_2, C_3 *tel que pour* $\varepsilon > 0$ *petit et* $L > \frac{3}{\varepsilon}$,

$$N_{Q_L}^{t+1}(\frac{\varepsilon}{2}) \leq \left(\frac{c_1}{\varepsilon}\right)^{c_2(\varepsilon)^{-2}} C_3^L N_{Q_L}^t(\varepsilon). \tag{8}$$

On veut recouvrir $S(1)(B \cap S(t)\mathcal{A})|_{Q_L}$.Lemme(1)$\Rightarrow$il suffit de recouvrir $S(1)(B \cap S(t)\mathcal{A})|_{Q_{L-\frac{1}{\varepsilon}}}$ et $S(1)(B \cap S(t)\mathcal{A})|_{Q_L \setminus Q_{L-\frac{1}{\varepsilon}}}$.

Proposition(1)+Proposition(2)$\Rightarrow$ C_3^L,

Borne $W^{1,\infty}$ uniforme sur $\mathcal{A}$ +Proposition(2)$\Rightarrow$ $\left(\frac{c_1}{\varepsilon}\right)^{c_2(\varepsilon)^{-2}}$.$\square$

Pour finir on utilise le Lemme(3) récursivement en commençant à l'instant $t = 1$ avec $\varepsilon = 1$.

$$N_{Q_L}^{(t=1)}(1) \leq e^{c(\alpha,\beta)L},$$

$$N_{Q_L}^{n+1}(2^{-n}) \leq C_3^{nL} e^{c(\alpha,\beta)L} C(n). \tag{9}$$

En prenant le *log* de (9), $n = E\left(\frac{log(\frac{1}{\varepsilon})}{log(2)}\right) + 1$ et $L \to +\infty$.

Lemme (3)

Il existe c_1, c_2, C_3 *tel que pour* $\varepsilon > 0$ *petit et* $L > \frac{3}{\varepsilon}$,

$$N_{Q_L}^{t+1}(\frac{\varepsilon}{2}) \leq \left(\frac{c_1}{\varepsilon}\right)^{c_2(\varepsilon)^{-2}} C_3^L N_{Q_L}^t(\varepsilon). \tag{8}$$

On veut recouvrir $S(1)(B \cap S(t)\mathcal{A})|_{Q_L}$.Lemme(1)$\Rightarrow$il suffit de recouvrir $S(1)(B \cap S(t)\mathcal{A})|_{Q_{L-\frac{1}{\varepsilon}}}$ et $S(1)(B \cap S(t)\mathcal{A})|_{Q_L \setminus Q_{L-\frac{1}{\varepsilon}}}$.

Proposition(1)+Proposition(2)$\Rightarrow$ C_3^L,

Borne $W^{1,\infty}$ uniforme sur $\mathcal{A}$ +Proposition(2)$\Rightarrow$ $\left(\frac{c_1}{\varepsilon}\right)^{c_2(\varepsilon)^{-2}}$.$\square$

Pour finir on utilise le Lemme(3) récursivement en commençant à l'instant $t = 1$ avec $\varepsilon = 1$.

$$N_{Q_L}^{(t=1)}(1) \leq e^{c(\alpha,\beta)L},$$

$$N_{Q_L}^{n+1}(2^{-n}) \leq C_3^{nL} e^{c(\alpha,\beta)L} C(n). \tag{9}$$

En prenant le *log* de (9), $n = E\left(\frac{log(\frac{1}{\varepsilon})}{log(2)}\right) + 1$ et $L \to +\infty$. $\square$

Minoration et corollaire

Minoration et corollaire

Définition (Variété instable)

$W^i(S(t), u_0) = \{u / \lim_{t \to -\infty} S(t)u = u_0\}.$

Minoration et corollaire

Définition (Variété instable)

$W^i(S(t), u_0) = \{u / \lim_{t\to -\infty} S(t)u = u_0\}.$

-Soit $u_0 \in \mathcal{A}$,

Minoration et corollaire

Définition (Variété instable)

$W^i(S(t), u_0) = \{u / \lim_{t\to-\infty} S(t)u = u_0\}.$

-Soit $u_0 \in \mathcal{A}$, alors $W^i(S(t), u_0) \in \mathcal{A}$.

Minoration et corollaire

Définition (Variété instable)

$W^i(S(t), u_0) = \{u / \lim_{t \to -\infty} S(t)u = u_0\}.$

-Soit $u_0 \in \mathcal{A}$, alors $W^i(S(t), u_0) \in \mathcal{A}$. En effet, pour $u \in W^i(S(t), u_0); \{S(t)u\}_{t \in \mathbb{R}}$ est un ensemble borné invariant.

Minoration et corollaire

Définition (Variété instable)

$W^i(S(t), u_0) = \{u / \lim_{t \to -\infty} S(t)u = u_0\}$.

-Soit $u_0 \in \mathcal{A}$, alors $W^i(S(t), u_0) \in \mathcal{A}$. En effet, pour $u \in W^i(S(t), u_0); \{S(t)u\}_{t \in \mathbb{R}}$ est un ensemble borné invariant.
-Soit $u_k(t, x) = \sqrt{1 - \lambda_k} \exp(-i\beta t) \exp(-i(\alpha - \beta)\lambda_k t) \exp(i\sqrt{\lambda_k} x)$

Minoration et corollaire

Définition (Variété instable)

$W^i(S(t), u_0) = \{u / \lim_{t\to-\infty} S(t)u = u_0\}$.

-Soit $u_0 \in \mathcal{A}$, alors $W^i(S(t), u_0) \in \mathcal{A}$. En effet, pour $u \in W^i(S(t), u_0); \{S(t)u\}_{t\in\mathbb{R}}$ est un ensemble borné invariant.
-Soit $u_k(t,x) = \sqrt{1-\lambda_k}\exp(-i\beta t)\exp(-i(\alpha-\beta)\lambda_k t)\exp(i\sqrt{\lambda_k}x)$ et soit $A(t)$ le linéarisé de $S(t)$ au tour de u_k.

Minoration et corollaire

Définition (Variété instable)

$W^i(S(t), u_0) = \{u / \lim_{t\to-\infty} S(t)u = u_0\}$.

-Soit $u_0 \in \mathcal{A}$, alors $W^i(S(t), u_0) \in \mathcal{A}$. En effet, pour $u \in W^i(S(t), u_0)$; $\{S(t)u\}_{t\in\mathbb{R}}$ est un ensemble borné invariant.
-Soit $u_k(t, x) = \sqrt{1-\lambda_k}\exp(-i\beta t)\exp(-i(\alpha-\beta)\lambda_k t)\exp(i\sqrt{\lambda}_k x)$ et soit $A(t)$ le linéarisé de $S(t)$ au tour de u_k.
$W^i(S(t), u_k) \supset W^i(A(t), u_k) \supset H \simeq \mathbb{R}^L$.

Minoration et corollaire

Définition (Variété instable)

$W^i(S(t), u_0) = \{u / \lim_{t\to-\infty} S(t)u = u_0\}.$

-Soit $u_0 \in \mathcal{A}$, alors $W^i(S(t), u_0) \in \mathcal{A}$. En effet, pour $u \in W^i(S(t), u_0)$; $\{S(t)u\}_{t\in\mathbb{R}}$ est un ensemble borné invariant.
-Soit $u_k(t,x) = \sqrt{1-\lambda_k}\exp(-i\beta t)\exp(-i(\alpha-\beta)\lambda_k t)\exp(i\sqrt{\lambda}_k x)$ et soit $A(t)$ le linéarisé de $S(t)$ au tour de u_k.
$W^i(S(t), u_k) \supset W^i(A(t), u_k) \supset H \simeq \mathbb{R}^L$.

Corollaire

$$\|u\|^2_{H^k(Q_L)} = \frac{1}{2L}\int_{Q_L}\sum_{i=0}^{k}|\partial_i u(x)|^2 dx.$$

Minoration et corollaire

Définition (Variété instable)

$W^i(S(t), u_0) = \{u / \lim_{t\to-\infty} S(t)u = u_0\}$.

-Soit $u_0 \in \mathcal{A}$, alors $W^i(S(t), u_0) \in \mathcal{A}$. En effet, pour $u \in W^i(S(t), u_0); \{S(t)u\}_{t\in\mathbb{R}}$ est un ensemble borné invariant.
-Soit $u_k(t,x) = \sqrt{1-\lambda_k}\exp(-i\beta t)\exp(-i(\alpha-\beta)\lambda_k t)\exp(i\sqrt{\lambda_k}x)$ et soit $A(t)$ le linéarisé de $S(t)$ au tour de u_k.
$W^i(S(t), u_k) \supset W^i(A(t), u_k) \supset H \simeq \mathbb{R}^L$.

Corollaire

$$\|u\|^2_{H^k(Q_L)} = \frac{1}{2L}\int_{Q_L}\sum_{i=0}^{k}|\partial_i u(x)|^2 dx.$$

$$\frac{1}{C}\log(\frac{1}{\varepsilon}) \leq \overline{H}_\varepsilon^{L^2}(\mathcal{A}) \leq \overline{H}_\varepsilon^{H^1}(\mathcal{A}) \leq \ldots \leq \overline{H}_\varepsilon^{H^k}(\mathcal{A}) \leq C\log(\frac{1}{\varepsilon}),$$

Minoration et corollaire

Définition (Variété instable)

$W^i(S(t),u_0)=\{u/\lim_{t\to-\infty}S(t)u=u_0\}.$

-Soit $u_0\in\mathcal{A}$, alors $W^i(S(t),u_0)\in\mathcal{A}$. En effet, pour $u\in W^i(S(t),u_0)$; $\{S(t)u\}_{t\in\mathbb{R}}$ est un ensemble borné invariant.
-Soit $u_k(t,x)=\sqrt{1-\lambda_k}\exp(-i\beta t)\exp(-i(\alpha-\beta)\lambda_k t)\exp(i\sqrt{\lambda_k}x)$ et soit $A(t)$ le linéarisé de $S(t)$ au tour de u_k.
$W^i(S(t),u_k)\supset W^i(A(t),u_k)\supset H\simeq\mathbb{R}^L$.

Corollaire

$$\|u\|^2_{H^k(Q_L)}=\frac{1}{2L}\int_{Q_L}\sum_{i=0}^{k}|\partial_i u(x)|^2dx.$$

$$\frac{1}{C}\log(\frac{1}{\varepsilon})\leq\overline{H}^{L^2}_{\varepsilon}(\mathcal{A})\leq\overline{H}^{H^1}_{\varepsilon}(\mathcal{A})\leq...\leq\overline{H}^{H^k}_{\varepsilon}(\mathcal{A})\leq C\log(\frac{1}{\varepsilon}),$$

$$\frac{1}{C}\leq dim^{L^2}_{F/I}(\mathcal{A})=dim^{H^1}_{F/I}(\mathcal{A})=...=dim^{H^k}_{F/I}(\mathcal{A})\leq C.$$

Merci de votre attention.